

Α. Σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων τις ίδιας συχνότητας

Έστω ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας που περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t) ,$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Παρατήρηση : Αν και οι δύο εξισώσεις παρουσιάζουν αρχική φάση μπορούμε να τις ανάγουμε στην παραπάνω περίπτωση με αλλαγή μεταβλητής ως εξής

$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t + \varphi_1) ,$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

Θέτοντας $\omega t + \varphi_1 = \omega t' \Leftrightarrow \omega t = \omega t' - \varphi_1$. Τότε οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t') ,$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t' + \varphi_2 - \varphi_1) \Leftrightarrow x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t' + \varphi')$$

οι οποίες είναι της ίδιας μορφής με τις αρχικές εξισώσεις

Η απομάκρυνση του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή θα είναι

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{ή}$$

$$x = A_1 \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Η παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιώντας τις γνώσεις από τα μαθηματικά $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$

$$x = A_1 \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu(\omega t) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + A_2 \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) \quad \text{ή}$$

$$x = (A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi) \cdot \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Η άλγεβρα Β λυκείου μας λέει ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x$$

μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$f(x) = \rho \eta\mu(x + \varphi)$$

όπου

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

και φ μια γωνία που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} , \quad \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho}$$

Οπότε στην δική μας περίπτωση η εξίσωση

$$x = (A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi) \cdot \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

η οποία μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta) \quad (1)$$

με πλάτος



$$A = \sqrt{(A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi)^2 + (A_2 \eta\mu\varphi)^2} \text{ ή}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi + 2A_1 A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi + A_2^2 \eta\mu^2\varphi} \text{ ή}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (2)$$

και θ μια γωνία για την οποία

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi}{A},$$

$$\eta\mu\theta = \frac{A_2 \eta\mu\varphi}{A}$$

Συνηθίζουμε στην Φυσική να υπολογίζουμε την $\epsilon\varphi\theta$. Για να προσδιοριστεί όμως επακριβώς η γωνία πρέπει να είμαστε προσεκτικοί (δες την παρατήρηση)

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{A_2 \eta\mu\varphi}{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (3)$$

Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι η σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας οδηγεί επίσης σε απλή αρμονική ταλάντωση της ίδιας συχνότητας.

Παρατήρηση

Από την εξίσωση (3) δεν μπορεί να προσδιοριστεί μονότιμα η γωνία θ γιατί και η γωνία $\pi + \theta$ έχει την ίδια εφαπτομένη ($\epsilon\varphi(\pi + \theta) = \epsilon\varphi\theta$). Αν όμως γνωρίζουμε το $\eta\mu\theta$ και το $\sigma\upsilon\nu\theta$ μπορούμε να προσδιορίσουμε το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία άρα και την γωνία.

Αφού δεν μπορούμε να στηριχθούμε στην εξίσωση (3) γιατί επιμένουμε σε αυτήν; Η απάντηση είναι πως μπορούμε να προσδιορίσουμε την γωνία θ με την προϋπόθεση όμως να υπολογίσουμε την γωνία που σχηματίζει ένα σημείο με συντεταγμένες $y = A_2 \eta\mu\varphi$ και $x = A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi$. Έτσι αν δεν κάνουμε αλγεβρικές πράξεις με τα πρόσημα, τότε από το πρόσημο του αριθμητική που παριστάνει το $\eta\mu\theta$ και το πρόσημο του παρονομαστή που παριστάνει το $\sigma\upsilon\nu\theta$ μπορούμε να βρούμε το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η γωνία. πχ αν υποθέσουμε ότι μετά από πράξεις βρήκαμε πως $A_2 \eta\mu\varphi = -1$ ενώ $A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi = +1$ (τέτοια περίπτωση έχουμε όταν πχ η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\varphi = \frac{3\pi}{2}$) τότε

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{-1}{+1}$$

τότε ψάχνουμε να βρούμε γωνία για την οποία το $\eta\mu\theta < 0$ (αριθμητής) και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$ (παρονομαστής) και η εφαπτομένη της είναι $\epsilon\varphi\theta = -1$. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει η γωνία να βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο άρα $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.