Κεφάλαιο 5- Ηλεκτρικό πεδίο Β΄ Λυκείου

SCHOOLDOCTOR

Α. Δυναμική ενέργεια –Δυναμικό – Διαφορά δυναμικού

Όταν τοποθετήσουμε ένα ηλεκτρικό φορτίο σε ένα σημείο ενός Ηλεκτροστατικού πεδίου, αυτό θα δεχτεί ηλεκτρική δύναμη και θα μετακινηθεί κινούμενο πάνω στην δυναμική γραμμή. Όπως γνωρίζουμε από την Φυσική της Α Λυκείου, όταν μια δύναμη μετακινεί το σημείο εφαρμογής της παράγει ή καταναλώνει έργο. Η ηλεκτρική δύναμη (όπως και η βαρυτική) είναι μια **συντηρητική δύναμη**, έτσι το έργο της είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που το φορτίο θα ακολουθήσει. Εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση. Συγκεκριμένα για κάθε συντηρητική δύναμη το έργο σχετίζεται με την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας. Στην περίπτωση της ηλεκτρικής δύναμης το έργο της ισούται με:

$$W_{F_{\eta\lambda}} = -\Delta U_{\eta\lambda} = U_{\eta\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\eta\lambda(\tau\epsilon\lambda)} \tag{6}$$

όπου βέβαια $U_{\eta\lambda}$ είναι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια.

Αξίζει να θυμηθούμε ότι για στην Α Λυκείου μάθαμε ότι το έργο του βάρους δίνεται από την μεταβολή της Βαρυτικής δυναμικής ενέργειας $W_B = -\Delta U_B$

Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια

Έστω ένα ακίνητο σημειακό φορτίο Q το οποίο δημιουργεί γύρω του ένα ηλεκτροστατικό πεδίο Coulomb. Όταν ένα δοκιμαστικό φορτίο q βρεθεί σε ένα σημείο Σ του ηλεκτρικού πεδίου και σε απόσταση r από αυτό δέχεται δύναμη Coulomb. Αποδεικνύεται ότι το έργο της δύναμης κατά την μετακίνηση

του δοκιμαστικού φορτίου από την θέση Σ μέχρι το άπειρο υπολογίζεται από την σχέση:

$$W_{F_{\eta\lambda}}^{\Sigma\to\infty} = k_c \frac{Q \cdot q}{r} \tag{7}$$

Το έργο της δύναμης κατά την παραπάνω μετακίνηση ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της Ηλεκτρικής δυναμικής Ενέργειας του συστήματος των δύο φορτίων. Δηλαδή:

$$W_{F_{\eta\lambda}}^{\Sigma\to\infty} = -\Delta U_{\eta\lambda} = U_{\eta\lambda}^{(\Sigma)} - U_{\eta\lambda}^{(\infty)}$$

Όταν τα φορτία βρίσκονται σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους δεν αλληλεπιδρούν, οπότε $U_{\eta\lambda}^{(\infty)} = 0$. Άρα για να υπολογίσουμε την ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα σύστημα αλληλεπιδρόντων ηλεκτρικών φορτίων:

$$W_{F_{\eta\lambda}}^{\Sigma\to\infty} = U_{\eta\lambda}^{(\Sigma)} = k_c \frac{Q \cdot q}{r}$$

Τα φορτία στην παραπάνω σχέση αντικαθιστώνται με το πρόσημο της. Άρα η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια μπορεί να είναι θετική (για ομόσημα φορτία) ή αρνητική (για ετερόσημα φορτία).

- $W_{F_{\eta\lambda}}^{\Sigma\to\infty} = U_{\eta\lambda}^{(\Sigma)} > 0$: Τα **ομόσημα φορτία** απωθούνται μεταξύ τους, άρα το έργο της δύναμης είναι θετικό (παραγόμενο). Τα φορτία πηγαίνουν μόνα τους σε άπειρη απόσταση.
- $W_{F_{\eta\lambda}}^{\Sigma\to\infty} = U_{\eta\lambda}^{(\Sigma)} < 0$: Τα **ετερόσημα φορτία** έλκονται μεταξύ τους, άρα το έργο της δύναμης είναι αρνητικό (παραγόμενο). Για να φέρουμε τα φορτία σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους πρέπει να καταναλώσουμε ενέργεια.

Το ηλεκτρικό Δυναμικό

Δυναμικό σε ένα σημείο (Σ) ενός ηλεκτροστατικού πεδίου Coulomb ονομάζεται το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που ισούται με το πηλίκο της δυναμικής ηλεκτρικής ενέργειας ενός σημειακού φορτίου q το οποίο βρίσκεται στο σημείο (Σ) του πεδίου προς το φορτίο αυτό.

$$V_\Sigma = \frac{U_{\eta\lambda}^{(\Sigma)}}{q} = \frac{W_{F_{\eta\lambda}}^{\Sigma\to\infty}}{q} \tag{8}$$

Η μονάδα μέτρησης του δυναμικού στο S.I. είναι το 1 V(Volt), το οποίο ορίζεται ως: $1V = \dfrac{1J}{1C}$.

Το δυναμικό εκφράζει ενέργεια ανά μονάδα φορτίου. Όταν λέμε ότι το δυναμικό είναι +5V σε ένα σημείο, σημαίνει ότι όταν τοποθετήσουμε ένα φορτίο 1C σε αυτό το σημείο θα αποκτήσει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ίση με 5 J. Επίσης το έργο της δύναμης κατά την μετακίνηση του φορτίου από το σημείο αυτό στο άπειρο ισούται με 5 J.

Δυναμικό σε σημείο ηλεκτροστατικού πεδίου Coulomb

Το δυναμικό σε ένα σημείο (Σ) ενός ηλεκτροστατικού πεδίου Coulomb που απέχει απόσταση r από το φορτίο πηγή Q θα δίνεται από την σχέση:

$$V_\Sigma = k_c \frac{Q}{r} \tag{9}$$

Με βάση τον ορισμό του Ηλεκτρικού Δυναμικού 8 και την σχέση για την Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια 8 μπορούμε να αποδείξουμε την 9

$$V_\Sigma = \frac{U_{\eta\lambda}^{(\Sigma)}}{q} = \frac{k_c \frac{Q\cdot q}{r}}{q} = k_c \frac{Q}{r}$$

Διαφορά Δυναμικού

Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων (Α) και (Γ) ενός ηλεκτρικού πεδίου ονομάζεται το πηλίκο του έργου της δύναμης για την μετακίνηση ενός δοκιμαστικού φορτίου από την θέση (Α) στην θέση (Γ) προς το φορτίο αυτό. Δηλαδή:

$$V_{A\Gamma} = V_A - V_\Gamma = \frac{W_{F_{\eta\lambda}}^{A\to\Gamma}}{q} \tag{10}$$

- Στην περίπτωση του Ηλεκτροστατικού πεδίου Coulomb η διαφορά δυναμικού υπολογίζεται από την σχέση:

  $$V_A - V_\Gamma = k_c Q\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_\Gamma}\right)$$

  όπου βέβαια r_A και r_Γ οι αποστάσεις των δύο σημείων από το φορτίο πηγή Q.

- Από την σχέση ορισμού της διαφοράς δυναμικού μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το έργο κατά την μετακίνηση του δοκιμαστικού φορτίου q από το σημείο (Α) στο σημείο (Γ).

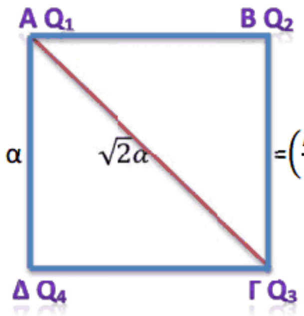
  $$W_{F_{\eta\lambda}}^{A\to\Gamma} = q(V_A - V_\Gamma) \tag{11}$$

  Όταν το μετακινούμενο δοκιμαστικό φορτίο q είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο e και η διαφορά δυναμικού το 1 V, τότε το έργο κατά την μετακίνηση είναι $W = 1e \cdot 1V = 1eV = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J. Το eV είναι μονάδα ενέργειας που χρησιμοποιείται στην ατομική και πυρηνική φυσική. Ο λόγος είναι προφανής, αφού το J είναι τεράστια ενέργεια για τα φαινόμενα του μικρόκοσμου.

Δυναμική Ενέργεια	*Ορισμός:* $U_\Sigma = q \cdot W_{F_{\eta\lambda}}^{\Sigma\to\infty}$ *Τύπος:* $U = k_c\frac{Q\cdot q}{r}$(ισχύει μόνο για σύστημα δυο σημειακών φορτισμένων σωματιδίων)
Δυναμικό	*Ορισμός:* $V_\Sigma = \frac{U_{\eta\lambda}^{(\Sigma)}}{q} = \frac{W_{F_{\eta\lambda}}^{\Sigma\to\infty}}{q}$
Διαφορά δυναμικού	$V_{A\Gamma} = V_A - V_\Gamma = \frac{W_{F_{\eta\lambda}}^{A\to\Gamma}}{q}$
Έργο Δύναμης πεδίου:	$W_{F_{\eta\lambda}}^{A\to\Gamma} = q(V_A - V_\Gamma)$

Α. Α1. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΦΟΡΤΙΩΝ

Εστω 4 φορτια τοποθετημενα στις κορυφες τετραγωνου πλευρας α.



$$U=(U_{1,2}+U_{1,3}+U_{1,4})+(U_{2,3}+U_{2,4})+(U_{3,4})$$

$$=\left(\frac{KQ_1Q_2}{\alpha}+\frac{KQ_1Q_3}{\sqrt{2}\alpha}+\frac{KQ_1Q_4}{\alpha}\right)+\left(\frac{KQ_2Q_3}{\alpha}+\frac{KQ_2Q_4}{\sqrt{2}\alpha}\right)+\left(\frac{KQ_3Q_4}{\alpha}\right)$$

Α2. ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟΥ

$$V_\Delta=\frac{KQ_1}{\alpha}+\frac{KQ_2}{\sqrt{2}\alpha}+\frac{KQ_3}{\alpha}.$$

- Δεν λαμβανεται υπ'οψιν το φορτιο στο σημειο που υπολογιζουμε το δυναμικο
- σε Α1 και Α2 τα φορτια χρησιμοποιουνται με το προσημο τους.

Β. ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΦΟΡΤΙΩΝ ΣΕ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗ ΠΕΔΙΑ

Β1. ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ (ΤΟ ΒΑΡΟΣ ΔΕΝ ΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΥΠ'ΟΨΙΝ)

Β1α. ΔΥΟ ΦΟΡΤΙΑ ΕΚ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΚΙΝΕΙΤΑΙ ΜΟΝΟ ΤΟ ΕΝΑ (Q_2).

Q_1 ——— r_1 ——— Q_2

Q_1 ———— r_2 ———— Q_2 εφαρμοζω ΑΔΜΕ:

$$E_{\delta\upsilon\nu.\sigma\upsilon\sigma\tau.\alpha\rho\chi.}+\cancel{E_{\kappa\iota\nu.\alpha\rho\chi.1}}+\cancel{E_{\kappa\iota\nu.\alpha\rho\chi.2}}=E_{\delta\upsilon\nu.\sigma\upsilon\sigma\tau.\tau\varepsilon\lambda.}+\cancel{E_{\kappa\iota\nu.\tau\varepsilon\lambda.1}}+E_{\kappa\iota\nu.\tau\varepsilon\lambda.2}\Rightarrow\frac{KQ_1Q_2}{r_1}=\frac{KQ_1Q_2}{r_2}+\frac{1}{2}m_2u_2^2$$

Β1β. ΔΥΟ ΦΟΡΤΙΑ ΠΟΥ ΚΙΝΟΥΝΤΑΙ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ.

πρωτα εφαρμοζω Α.Δ.Ο: $(\overset{+}{\rightarrow})$

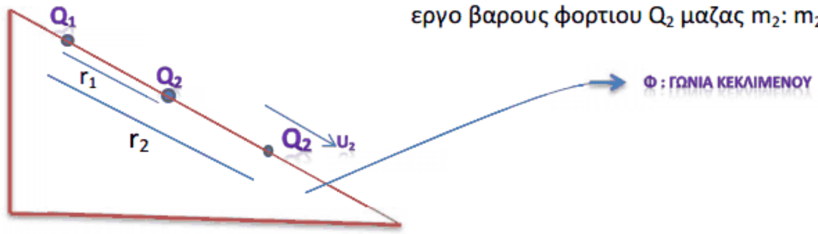
$P_{ολ.αρχ.} = P_{ολ.τελ.} \Rightarrow 0+0= -m_1u_1+m_2u_2$ μετα εφαρμοζω ΑΔΜΕ:

$E_{δυν.συστ.αρχ.}+E_{κιν.αρχ.1}+E_{κιν.αρχ.2}=E_{δυν.συστ.τελ.}+E_{κιν.τελ.1}+E_{κιν.τελ.2} \Rightarrow$

$$\frac{KQ_1Q_2}{r_1} = \frac{KQ_1Q_2}{r_2} + \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 .$$

B2. ΠΛΑΓΙΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ,ΒΑΡΟΣ ΥΠ'ΟΨΙΝ ΚΑΙ ΚΙΝΕΙΤΑΙ ΤΟ ΕΝΑ ΦΟΡΤΙΟ (Q_2).

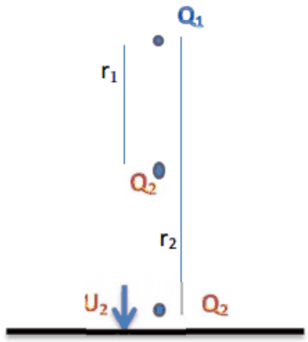
εργο βαρους φορτιου Q_2 μαζας m_2: $m_2gημφ(r_2-r_1)$



εφαρμοζω ΘΜΚΕ : $E_{κιν.τελ.2} - E_{κιν.αρχ.2} = E_{δυν.συστ.αρχ} - E_{δυν.συστ.τελ} + W_B \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}m_2u_2^2 - 0 = \frac{KQ_1Q_2}{r_1} - \frac{KQ_1Q_2}{r_2} + m_2gημφ(r_2-r_1) .$$

B3. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ,ΒΑΡΟΣ ΥΠ'ΟΨΙΝ ΚΑΙ ΚΙΝΕΙΤΑΙ ΤΟ ΕΝΑ ΦΟΡΤΙΟ(Q_2).



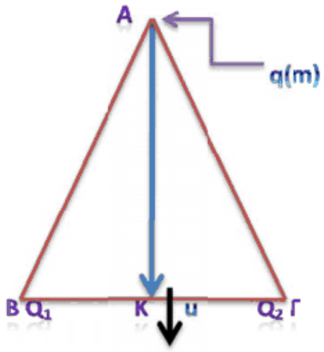
εργο βαρους φορτιου Q_2 μαζας m_2: $m_2g(r_2-r_1)$

εφαρμοζω ΘΜΚΕ : $E_{κιν.τελ.2} - E_{κιν.αρχ.2} = E_{δυν.συστ.αρχ} - E_{δυν.συστ.τελ} + W_B$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_2u_2^2 - 0 = \frac{KQ_1Q_2}{r_1} - \frac{KQ_1Q_2}{r_2} + m_2g(r_2-r_1) .$$

(προσοχη!! να τηρηθουν προσημα σε δυναμικα και φορτια)

B4. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ 3 ΦΟΡΤΙΩΝ. ,ΒΑΡΟΣ ΥΠ'ΟΨΙΝ ΚΑΙ ΚΙΝΕΙΤΑΙ ΤΟ ΕΝΑ ΦΟΡΤΙΟ (q).



εφαρμοζω ΘΜΚΕ : $E_{κιν.τελ.(q)} - E_{κιν.αρχ.(q)} = W_{A \to K} + W_B \Rightarrow$

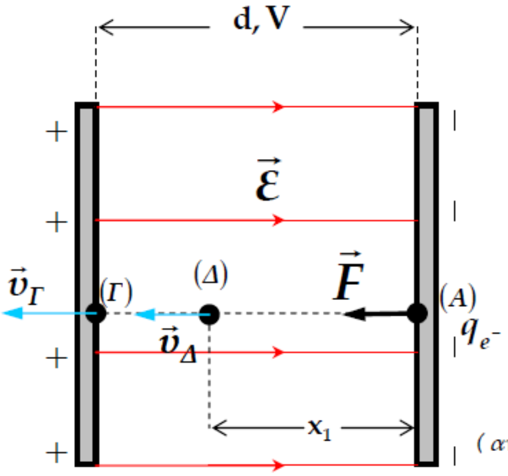
$\frac{1}{2}mu^2 - 0 = (V_A - V_K)q + mg\,(AK)$ οπου:

$V_A = \frac{KQ_1}{AB} + \frac{KQ_2}{A\Gamma}$ και $V_K = \frac{KQ_1}{BK} + \frac{KQ_2}{K\Gamma}$ (με προσημα)

Β. Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

I. *Κίνηση ηλεκτρονίου που αφήνεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο χωρίς αρχική ταχύτητα*

Το ηλεκτρόνιο που βρίσκεται αρχικά στον αρνητικό οπλισμό του επίπεδου πυκνωτή θα δεχθεί δύναμη από το πεδίο όπως φαίνεται στο σχήμα. Επειδή το πεδίο είναι ομογενές, η δύναμη που θα δεχθεί το ηλεκτρόνιο θα είναι σε κάθε θέση του μέσα στο πεδίο σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση. Επομένως το ηλεκτρόνιο θα αρχίσει να κινείται και σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα θα κάνει Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση (Ε.Ο.Επ.Κ.) χωρίς αρχική ταχύτητα.



❑ Υπολογισμός δύναμης

$$E = \frac{F}{q_e} \Rightarrow \boxed{F = E \cdot q_e} \quad (1)$$

(αν η άσκηση μου δίνει την ένταση)

Όμως επειδή $E = \dfrac{V}{d}$ η σχέση (1) δίνει

$$\boxed{F = \frac{V \cdot q_e}{d}} \quad (2)$$

(αν η άσκηση μου δίνει την τάση του πυκνωτή και την απόσταση των οπλισμών του)

❑ Υπολογισμός επιτάχυνσης

2ος νόμος του Νεύτωνα: $F = m \cdot a \Rightarrow a = \dfrac{F}{m}$

Οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) αντίστοιχα παίρνουμε:

$$\boxed{a = \frac{E \cdot q_e}{m}} \quad (3) \qquad \text{ή} \qquad \boxed{a = \frac{V \cdot q_e}{d \cdot m}} \quad (4)$$

Εξισώσεις ταχύτητας – κίνησης

$$\upsilon = a \cdot t$$
$$x = \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

Χρόνος που χρειάζεται το e⁻ για να φτάσει στο θετικό οπλισμό

Αν t_1 ο χρόνος που χρειάζεται το ηλεκτρόνιο να φτάσει στο θετικό οπλισμό, τότε στο χρόνο αυτό θα έχει διανύσει διάστημα ίσο με την απόσταση των δύο οπλισμών οπότε θα ισχύει:

$$\left.\begin{array}{r} x = d \\ x = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d = \tfrac{1}{2}\alpha t_1^2 \Rightarrow \boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2a}{d}}}$$

Ταχύτητα πρόσκρουσης του e⁻ στο θετικό οπλισμό

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = a \cdot t \\ t = t_1 = \sqrt{\dfrac{2a}{d}} \end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \alpha t_1 \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \alpha\sqrt{\frac{2a}{d}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\Gamma = \sqrt{2\alpha\, d}}$$

Παρατηρήσεις:

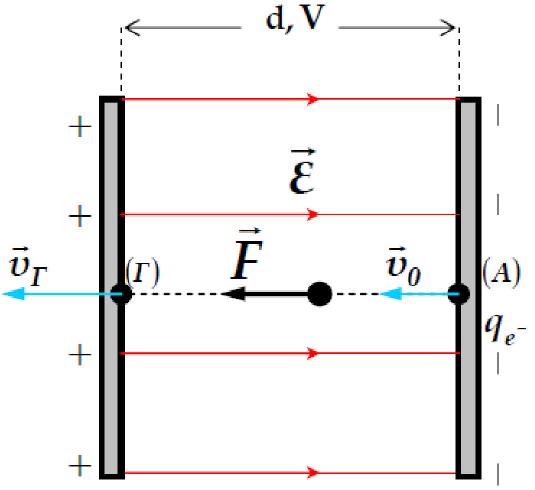
1. Το φορτίο του ηλεκτρονίου στους παραπάνω τύπους το βάζουμε κατ' απόλυτο τιμή.
2. Σε τυχαία θέση (Δ) που απέχει απόσταση $x=x_1$ από τον αρνητικό οπλισμό (βλέπε σχήμα), η ταχύτητα υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στο (Γ), δηλαδή ισχύει $\upsilon_\Delta = \sqrt{2\,\alpha\, x_1}$.
3. Η ταχύτητα σε οποιοδήποτε σημείο της κίνησης του e⁻ υπολογίζεται και με το Θ.Μ.Κ.Ε.
   Θ.Μ.Κ.Ε. $_{(A)\to(\Gamma)}$:

   $$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_\Gamma - K_A = W_{F_{ηλ.}} \Rightarrow \tfrac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 - 0 = F \cdot d \Rightarrow \tfrac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 = E \cdot q_e d \Rightarrow$$

   $\upsilon_\Gamma = \sqrt{\dfrac{2Eq_e d}{m}}$ που είναι η ίδια με τη σχέση $\upsilon_\Gamma = \sqrt{2ad}$, κάτι που προκύπτει από τη σχέση (3).
4. Αν το φορτίο είναι θετικό ισχύουν όλα τα παραπάνω με τη διαφορά ότι το θετικό φορτίο πρέπει να αφεθεί στον θετικό οπλισμό.

ΙΙ. <u>Κίνηση ηλεκτρονίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με αρχική ταχύτητα υ0 αντίρροπη στις δυναμικές γραμμές</u>

Στη περίπτωση αυτή ισχύουν ότι και στην ***Ι*** με τη διαφορά ότι το e^- θα κάνει Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση (Ε.Ο.Επ.Κ.) με αρχική ταχύτητα $υ_0$. Έτσι δύναμη και η επιτάχυνση θα δίνονται από τους τύπους της περίπτωσης ***Ι***. Τα μόνα που αλλάζουν είναι οι εξισώσεις ταχύτητας και κίνησης.



❑ <u>Εξισώσεις ταχύτητας – κίνησης</u>

$$\upsilon = \upsilon_0 + a \cdot t$$

$$x = \upsilon_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

➢ *<u>Σχέση που συνδέει την ταχύτητα με τη μετατόπιση (ανεξάρτητη χρόνου)</u>*

Εξίσωση ταχύτητας

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$$

Εξίσωση μετατόπισης

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Από την πρώτη σχέση επιλύοντας ως προς το χρόνο: $t = \dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha}$ **(#)**

Και με αντικατάσταση στη δεύτερη:

$$x = \upsilon_0 \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{\upsilon_0 \cdot \upsilon - \upsilon_0^2}{\alpha} + \frac{\upsilon^2 - 2\upsilon_0 \cdot \upsilon + \upsilon_0^2}{2\alpha} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2\alpha} \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2\alpha\, x \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2\alpha\, x}}$$

Έτσι η ταχύτητα με την οποία το e⁻ φτάνει στο θετικό οπλισμό θα είναι

$$\boxed{\upsilon_I = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2\alpha\, d}}$$

ενώ ο χρόνος που θέλει το e⁻ μέχρι να φτάσει στο θετικό οπλισμό που προκύπτει με αντικατάσταση στην **(#)** θα είναι

$$\boxed{t_1 = \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2\alpha\, d} - \upsilon_0}{\alpha}}$$

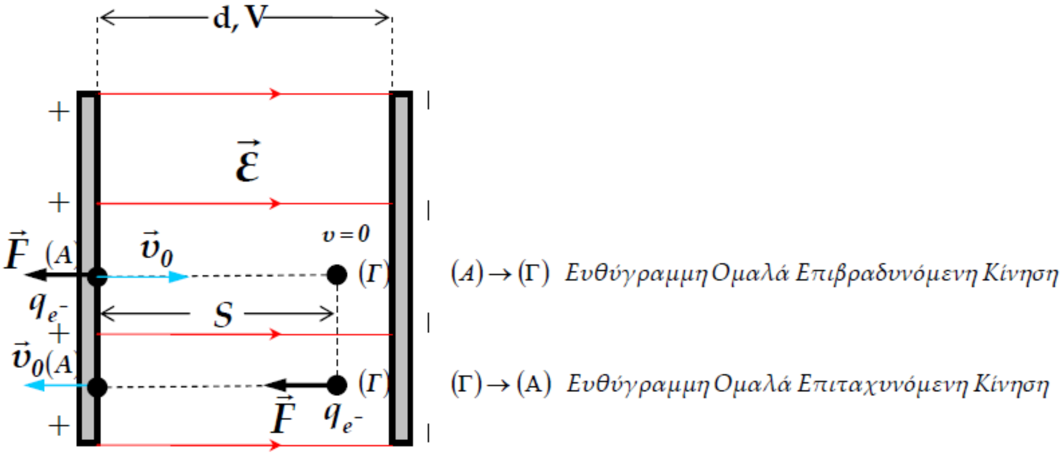
Παρατηρήσεις:

1. Η ταχύτητα σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς του e⁻, προκύπτει και με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. όπως και στην περίπτωση ***I***.
2. Αν το φορτίο είναι θετικό ισχύουν όλα τα παραπάνω με τη διαφορά ότι το θετικό φορτίο πρέπει να έχει αρχική ταχύτητα ομόρροπη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

III. Κίνηση ηλεκτρονίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με αρχική ταχύτητα υ_0 ομόρροπη στις δυναμικές γραμμές

Στην περίπτωση αυτή, επειδή η αρχική ταχύτητα του e⁻ είναι αντίρροπη με τη δύναμη που ασκεί το πεδίο, το e⁻ θα κάνει Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση (Ε.Ο.Εβ.Κ) αρχικά. Η δύναμη και η επιτάχυνση θα δίνονται πάλι από τους τύπους της περίπτωσης ***I***.
Υπάρχουν 2 διαφορετικές υποπεριπτώσεις:
α) Το e⁻ φτάνει στον αρνητικό οπλισμό προτού μηδενιστεί η ταχύτητά του.
β) Η ταχύτητα του e⁻ μηδενίζεται τη στιγμή που φτάνει στον αρνητικό οπλισμό, ή λίγο πριν φτάσει σε αυτόν, δηλαδή το e⁻ σταματάει ή την στιγμή που φτάνει στον θετικό οπλισμό ή λίγο πριν φτάσει σε αυτόν.

Η πρώτη υποπερίπτωση δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γι' αυτό θα μας απασχολήσει η δεύτερη.
Επειδή η δύναμη που ασκείται στο e⁻ δεν σταματάει να του ασκείται ποτέ ενώ αυτό βρίσκεται μέσα στο πεδίο, θα το αναγκάσει από τη στιγμή που σταματάει και μετά να κινηθεί προς τα πίσω αυτή τη φορά με Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση (Ε.Ο.Επ.Κ.) χωρίς αρχική ταχύτητα έως ότου το e⁻ επιστρέψει στο σημείο από όπου ξεκίνησε.



Για να μελετήσουμε αυτή την κίνηση που κάνει το e⁻ τόσο καθώς επιβραδύνεται αλλά και όσο καθώς επιταχύνεται προς την αντίθετη φορά, χρησιμοποιούμε τις παρακάτω εξισώσεις ταχύτητας και κίνησης, με τη διαφορά ότι όταν το e⁻ επιβραδύνεται (κινείται προς δεξιά όπως φαίνεται στο σχήμα) η ταχύτητά του θα είναι θετική, ενώ όταν επιβραδύνεται (κινείται προς τα αριστερά όπως φαίνεται στο σχήμα) η ταχύτητά του θα είναι αρνητική.

Εξισώσεις ταχύτητας – κίνησης

$$\upsilon = \upsilon_0 - a \cdot t$$

$$x = \upsilon_0 t - \tfrac{1}{2} a t^2$$

$\upsilon > 0 \rightarrow$ *το e^- κινείται προς τα δεξιά*

$\upsilon < 0 \rightarrow$ *το e^- κινείται προς τα αριστερά*

Σχέση που συνδέει την ταχύτητα με τη μετατόπιση (ανεξάρτητη χρόνου)

Με τρόπο ανάλογο όπως και στην περίπτωση ***ΙΙ***, προκύπτει η σχέση:

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2a\,x}}$$

Χρόνος που θέλει το e⁻ μέχρι να σταματήσει στιγμιαία (θέση Γ)

σημείο Γ: $$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \upsilon_0 - \alpha t \\ \upsilon_\Gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t_{A\Gamma} = \frac{\upsilon_0}{\alpha}}$$

Διάστημα (S) που διανύει το e⁻ μέχρι να σταματήσει στιγμιαία

$$\left.\begin{array}{l} x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ t = t_{A\Gamma} = \frac{\upsilon_0}{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow S = \upsilon_0 \cdot \frac{\upsilon_0}{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\upsilon_0}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow$$

Ολικός χρόνος κίνησης του e⁻ μέχρι να γυρίσει στη θέση Α

$$\left.\begin{array}{l} x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \upsilon_0 t_{o\lambda.} - \frac{1}{2}\alpha t_{o\lambda.}^2 \Rightarrow \boxed{t_{o\lambda} = \frac{2\upsilon_0}{\alpha}}$$

Παρατηρούμε ότι $t_{o\lambda.} = 2t_{A\Gamma}$ οπότε ο χρόνος που θέλει το e⁻ από το σημείο που μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητά του μέχρι να επιστρέψει στο σημείο από όπου ξεκίνησε είναι ο ίδιος.

$$t_{A\Gamma} = t_{\Gamma A} = \frac{1}{2}t_{o\lambda.} = \frac{\upsilon_0}{\alpha}$$

Ταχύτητα επιστροφής

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \upsilon_0 - \alpha t \\ t = t_{o\lambda.} = \frac{2\upsilon_0}{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon_{\varepsilon\pi.} = \upsilon_0 - \alpha\frac{2\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\varepsilon\pi.} = -\upsilon_0}$$

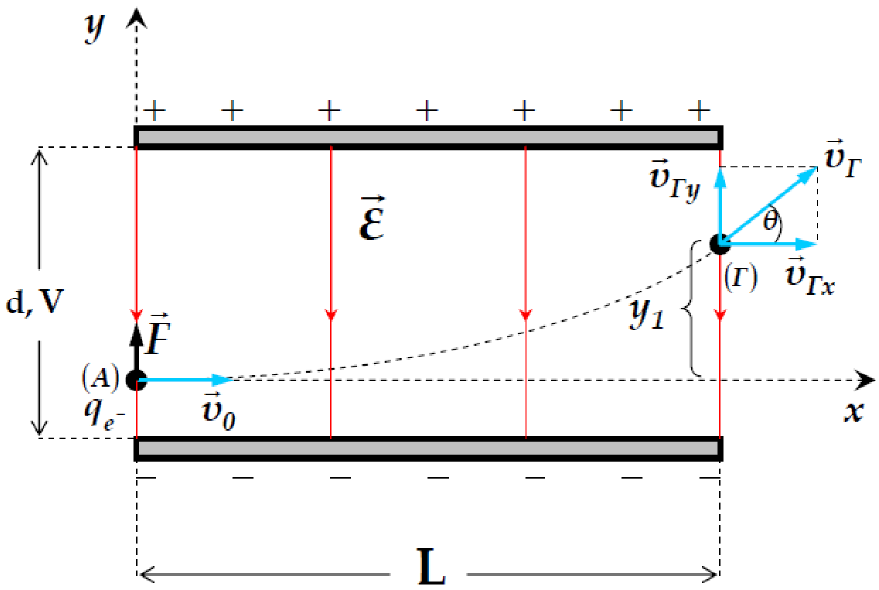
Παρατηρήσεις:

1. Η ταχύτητα σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς του e⁻, προκύπτει και με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. όπως και στην περίπτωση *I*.
2. Αν το φορτίο είναι θετικό ισχύουν όλα τα παραπάνω με τη διαφορά ότι το θετικό φορτίο πρέπει να έχει αρχική ταχύτητα αντίρροπη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου.
3. Για να φτάσει το επιβραδυνόμενο φορτίο από τη μια πλάκα στην άλλη πρέπει το συνολικό διάστημα της επιβραδυνόμενης κίνησής

του να είναι μεγαλύτερο ή οριακά ίσο με την απόσταση των δύο πλακών, δηλαδή:

$$S \geq d \Rightarrow \boxed{\frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \geq d}$$

IV. *Κίνηση ηλεκτρονίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με αρχική ταχύτητα υ₀ κάθετη στις δυναμικές γραμμές*



Σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων[1], η κίνηση του e⁻ μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο επιμέρους κινήσεων που γίνονται ταυτόχρονα. Μιας κίνησης σε έναν άξονα x κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου και του οποίου ο φορέας θα περνάει απ' την αρχική ταχύτητα του e⁻ με την οποία μπαίνει στο πεδίο, και μιας κίνησης σε ένα άξονα y παράλληλο προς τις δυναμικές γραμμές του πεδίου όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Το e⁻ δέχεται δύναμη σταθερή από το πεδίο με διεύθυνση παράλληλη συνεχώς στις δυναμικές γραμμές όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη αυτή υπολογίζεται από τους τύπους (1) ή (2) της περίπτωσης *I*.
Στον άξονα x το e⁻ δεν δέχεται καμία δύναμη οπότε θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (Ε.Ο.Κ.) με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$. Στον άξονα y το e⁻ δεν

[1] **Αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων**: όταν ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δύο κινήσεις και σε χρόνο t_1 πάει από το (Α) στο (Γ), τότε το σώμα φτάνει στην ίδια θέση αν κάνει ξεχωριστά και διαδοχικά κάθε κίνηση για χρόνο t_1 όμως την καθεμία.

έχει αρχική ταχύτητα και δέχεται συνεχώς σταθερή δύναμη $\vec{F}$ όπως φαίνεται στο σχήμα οπότε κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Άξονας x	Άξονας y
$F_x = 0$	$F_y = E \cdot q_e$ ή $F_y = \frac{V \cdot q_e}{d}$
$a_x = 0$	$a_y = \frac{E \cdot q_e}{m}$ ή $a_y = \frac{V \cdot q_e}{d \cdot m}$
$\upsilon_x = \upsilon_0$	$\upsilon_y = a_y t$
$x = \upsilon_0 t$	$y = \frac{1}{2} a_y t^2$

- *Χρόνος παραμονής στο πεδίο (t_1)*

Όταν το e⁻ εξέλθει από το πεδίο στη θέση (Γ) θα έχει μετατοπιστεί στον άξονα x κατά L.

$$\left.\begin{array}{l} x = \upsilon_0 t \\ x = L \end{array}\right\} \Rightarrow L = \upsilon_0 t_1 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{L}{\upsilon_0}}$$

- *Απόκλιση ή εκτροπή από την αρχική διεύθυνση κίνησης (y_1)*

Για να υπολογίσουμε την κατακόρυφη απόκλιση y_1 του e⁻ απ' την αρχική του θέση, αρκεί να θέσουμε στη σχέση $y = \frac{1}{2} a_y t^2$ όπου t το χρόνο παραμονής t_1.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} a_y t^2 \\ t = t_1 = \frac{L}{\upsilon_0} \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{V q_e}{dm} \cdot \frac{L^2}{\upsilon_0^2}}$$

Ταχύτητα εξόδου από το πεδίο (υΓ)

Σε κάθε σημείο της τροχιάς του e⁻ μέσα στο πεδίο και επομένως και στη θέση (Γ), η ταχύτητα του θα είναι ίση με:

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_{x\Gamma}^2 + \upsilon_{y\Gamma}^2} \\ &\text{όπου} \\ &\upsilon_{x\Gamma} = \upsilon_0 \\ &\upsilon_{y\Gamma} = \alpha_y t_1 \Rightarrow \upsilon_{y\Gamma} = \frac{Vq_e}{dm}\cdot\frac{L}{\upsilon_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_0^2 + \left(\frac{Vq_e}{dm}\cdot\frac{L}{\upsilon_0}\right)^2}}$$

Ως διανυσματικό μέγεθος η ταχύτητα υπολογίζουμε και την κατεύθυνσή της μέσω της εφαπτομένης της γωνίας θ όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{\upsilon_{y\Gamma}}{\upsilon_{x\Gamma}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\phi\theta = \frac{Vq_e}{dm}\cdot\frac{L}{\upsilon_0^2}}$$

Η ταχύτητα του e⁻ μέσα στο πεδίο σε κάθε του σημείο θα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά του.

Εξίσωση τροχιάς

Η εξίσωση της τροχιάς του e⁻ και οποιουδήποτε σωματιδίου είναι μια σχέση της μορφής $y = f(x)$ που συνδέει τις συντεταγμένες x, y του σωματιδίου και προκύπτει με απαλοιφή του χρόνου.

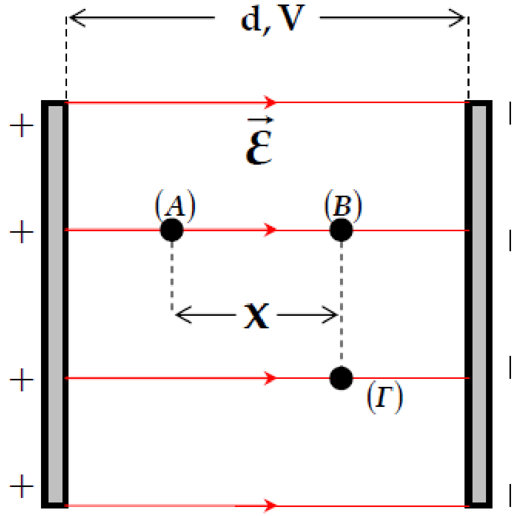
$$\left.\begin{aligned} &x = \upsilon_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{\upsilon_0} \\ &y = \tfrac{1}{2}\alpha_y t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\cdot\alpha_y\left(\frac{x}{\upsilon_0}\right)^2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{Vq_e}{2dm\upsilon_0^2}\cdot x^2}$$

Επειδή η τελευταία σχέση είναι της μορφής $y = Ax^2$, η τροχιά του e είναι ***παραβολική*** όπως φαίνεται άλλωστε και στο σχήμα.

Για τις ασκήσεις

Δυναμικό – Διαφορά δυναμικού μεταξύ 2 σημείων στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Θεωρούμε Ο.Η.Π. που δημιουργείται ανάμεσα στους οπλισμούς επίπεδου πυκνωτή. Εστω V η τάση του πυκνωτή και d η απόσταση των οπλισμών του. Στο πεδίο αυτό ισχύει:



σχήμα 1

α) Η τάση του πυκνωτή V είναι η διαφορά του δυναμικού του θετικού οπλισμού του πυκνωτή μείον το δυναμικό του αρνητικού οπλισμού του πυκνωτή, δηλαδή ισχύει

$$V = V_{(+)} - V_{(-)}$$

οπότε

$$V_{(-)} - V_{(+)} = -V$$

β) Κατά τη φορά των δυναμικών γραμμών του πεδίου το δυναμικό ελαττώνεται. Δηλαδή ισχύει: $V_A > V_B$.

γ) Όλα τα σημεία τα οποία τα οποία βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου, δηλαδή ισαπέχουν απ' αυτές, έχουν το ίδιο δυναμικό. Δηλαδή ισχύει: $V_B = V_\Gamma$.

δ) Οταν σε άσκηση μας ζητάνε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Α και Β που βρίσκονται πάνω στην ίδια δυναμική γραμμή (βλέπε σχήμα 1), τότε:

i) Υπολογίζουμε τη ένταση του πεδίου $\vec{E}$ (αν δε δίνεται) από τη σχέση

$$E = \frac{V}{d}$$

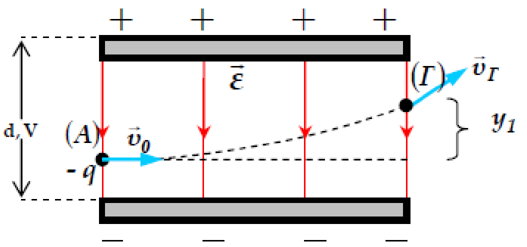
ii) Αν x είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων Α και Β των οποίων ζητάμε τη διαφορά δυναμικού, τότε επειδή η ένταση του πεδίου είναι σταθερή θα ισχύει

$$E=\frac{V_A-V_B}{x}\Rightarrow V_A-V_B=E\cdot x\overset{E=\frac{V}{d}}{\Rightarrow}\boxed{V_{AB}=\frac{V}{d}\cdot x}$$

iii) Τέλος ελέγχουμε ποιο από τα δύο σημεία έχει μεγαλύτερο δυναμικό, όπως το περιγράψαμε στο β), και αναλόγως τη διαφορά δυναμικού των δύο σημείων τη βάζουμε θετική ή αρνητική.

π.χ. στο σχήμα 1 $V_{AB}>0$ ενώ $V_{BA}<0$.

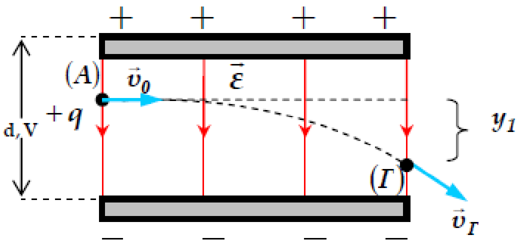
ε) Σε πολλές ασκήσεις που το φορτίο μπαίνει με αρχική ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές, μας ζητάνε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με την περίπτωση δ), μόνο που αντί για την μεταξύ των δύο σημείων απόσταση βάζουμε την απόκλιση του φορτίου απ' την αρχική του θέση (βλέπε σχήματα 2 και 3).



$$\boxed{V_{A\Gamma}=-\frac{V}{d}\cdot y_1<0}$$

$$\boxed{V_{\Gamma A}=\frac{V}{d}\cdot y_1>0}$$

σχήμα 2



$$\boxed{V_{A\Gamma}=\frac{V}{d}\cdot y_1>0}$$

$$\boxed{V_{\Gamma A}=-\frac{V}{d}\cdot y_1<0}$$

σχήμα 3

Στην περίπτωση λοιπόν που το φορτίο μπαίνει κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου, τότε αν το φορτίο είναι αρνητικό το δυναμικό στην έξοδο μεγαλώνει, ενώ αν το φορτίο είναι θετικό το δυναμικό στην έξοδο μικραίνει.

<u>Παρατήρηση</u> : Η διαφορά δυναμικού δύο σημείων υπολογίζεται και με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των δύο αυτών σημείων.

$\Theta.M.K.E._{A\to\Gamma}: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_\Gamma - K_A = W_F \Rightarrow \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = q \cdot V_{A\Gamma} \Rightarrow$

$$\boxed{V_{A\Gamma} = \frac{m}{2q}\left(v_\Gamma^2 - v_0^2\right)}$$

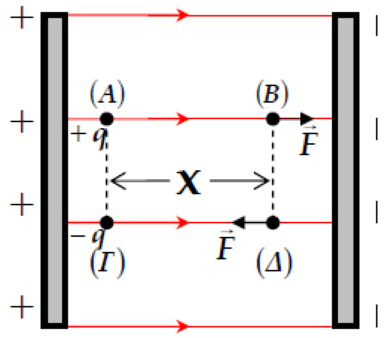
το φορτίο q με το πρόσημό του

Το έργο της δύναμης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου

α) **Με βάση τον ορισμό του έργου σταθερής δύναμης**

Ο ορισμός του έργου μιας δύναμης είναι η δύναμη αυτή επί την μετατόπιση του σώματος. Αν η δύναμη και η μετατόπιση είναι της ίδιας φοράς τότε το έργο είναι θετικό, ενώ αν η δύναμη και η μετατόπιση είναι διαφορετικής φοράς τότε το έργο είναι αρνητικό.

Με βάση τα προηγούμενα και το ότι $F = E \cdot q$, έχουμε:



$AB : W_F = Eqx$

$BA : W_F = -Eqx$

$\Gamma\Delta : W_F = -Eqx$

$\Delta\Gamma : W_F = Eqx$

<u>Προσοχή</u> : Το φορτίο στο τύπο $F = E \cdot q$, το βάζουμε πάντα κατ' απόλυτο τιμή.

β) **Από τη σχέση**

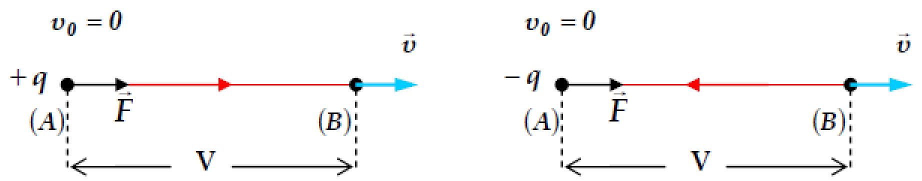
$$W_{F(A\to B)} = q(V_A - V_B)$$

Στη περίπτωση αυτή το φορτίο το βάζουμε με το πρόσημό του

γ) **Από το Θ.Μ.Κ.Ε.**

$\Theta.M.K.E._{A\to B}: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_B - K_A = W_F \Rightarrow \boxed{W_{F(A\to B)} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2}$

<u>Επιτάχυνση φορτίου μεταξύ δύο σημείων που που παρουσιάζουν διαφορά δυναμικού V</u>



Όταν φορτίο ανεξάρτητα από το είδος του, επιταχύνεται μεταξύ δύο σημείων που παρουσιάζουν γνωστή τάση V, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. και υπολογίζουμε είτε την κινητική ενέργεια είτε την ταχύτητα που αποκτά το φορτίο.

$Θ.Μ.Κ.Ε._{A\to B}$: $\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_B - K_A = W_F \Rightarrow \boxed{K_B = q\cdot V}$

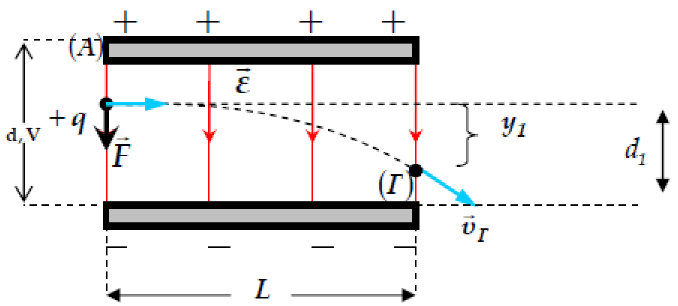
ή $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = q\cdot V \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{2qV}{m}}}$

Αν το φορτίο έχει αρχική ταχύτητα ($\upsilon_0 \neq 0$), τότε εφαρμόζουμε πάλι Θ.Μ.Κ.Ε οπότε έχουμε:

$Θ.Μ.Κ.Ε._{A\to B}$: $\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_B - K_A = W_F \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = q\cdot V \Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2qV}{m}}}$$

<u>Κίνηση φορτίου με αρχική ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου</u>



α) Για να εξέλθει το φορτίο από το πεδίο χωρίς να συναντήσει τον αρνητικό (ή τον θετικό οπλισμό ανάλογα), πρέπει η απόκλισή του y_1 από την αρχική του θέση (A) να είναι μικρότερη ή οριακά ίση με την απόσταση d_1. Αυτό συμβαίνει αν

$$\boxed{x = L \qquad \kappa\alpha\iota \qquad y_1 \geq d_1}$$

β) Η κινητική ενέργεια του φορτίου μέσα στο πεδίο συνεχώς αυξάνεται.

$\underline{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (A)}$: $K_A = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$

$\underline{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (\Gamma)}$: $K_\Gamma = \frac{1}{2} m\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow K_\Gamma = \frac{1}{2} m\left(\upsilon_0^2 + \upsilon_y^2\right)$

γ) Η δυναμική ενέργεια του φορτίου (ανεξάρτητα από το είδος του) κατά την κίνησή του μέσα στο πεδίο συνεχώς ελαττώνεται. Αν μας ζητάνε να υπολογίσουμε την μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας κατά την κίνηση του μέσα στο πεδίο τότε επειδή η ηλεκτρικές δυνάμεις είναι δυνάμεις συντηρητικές τότε το έργο τους μεταξύ 2 σημείων ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσο το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενεργείας των δύο αυτών σημείων δηλαδή:

$$W_{F(A\to\Gamma)} = -\Delta U_{A\Gamma} \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta U_{A\Gamma} = -W_{F(A\to\Gamma)}}$$

οπότε θα ισχύει και ότι:

$$\boxed{\Delta U_{A\Gamma} = -\Delta K_{A\Gamma}}$$

σύμφωνα με το Θ.Μ.Κ.Ε.