ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}: ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Εισαγωγικές γνώσεις - Η μηχανική ενέργεια στα ρευστά

Για να περιγράψουμε ενεργειακά τα ρευστά εισάγουμε τα φυσικά μεγέθη: δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού, κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού , μηχανική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού και έργο δύναμης ανά μονάδα όγκου του ρευστού.

Δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού : $\frac{U}{\Delta V}=\frac{mgh}{\Delta V}=\rho gh$

Κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού : $\frac{K}{\Delta V}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\Delta V}=\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$

Έργο δύναμης ανά μονάδα όγκου του ρευστού:

$$\frac{W}{\Delta V}=\frac{F\cdot\Delta x}{\Delta V}=\frac{F_1\Delta x-F_2\Delta x}{\Delta V}=\frac{(p_1-p_2)A\cdot\Delta x}{\Delta V}=p_1-p_2$$

SCHOOLDOCTOR

Η εξίσωση του Bernoulli

Γνωρίζουμε ότι η πίεση σε ένα ρευστό που ρέει σε σωλήνα συνήθως δεν είναι ίδια σε δύο σημεία του όταν αυτά βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος. Η πίεση για παράδειγμα στους σωλήνες των υψηλότερων ορόφων σε μια πολυκατοικία είναι μικρότερη αυτής του ισογείου. Γνωρίζουμε επίσης, από το νόμο της συνέχειας, ότι η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται ανάλογα με τη διατομή του σωλήνα στον οποίο ρέει. Το 1738 ο Daniel Bernoulli βρήκε τη σχέση που συνδυάζει την πίεση σε ένα σημείο του υγρού με την ταχύτητά του και το ύψος.

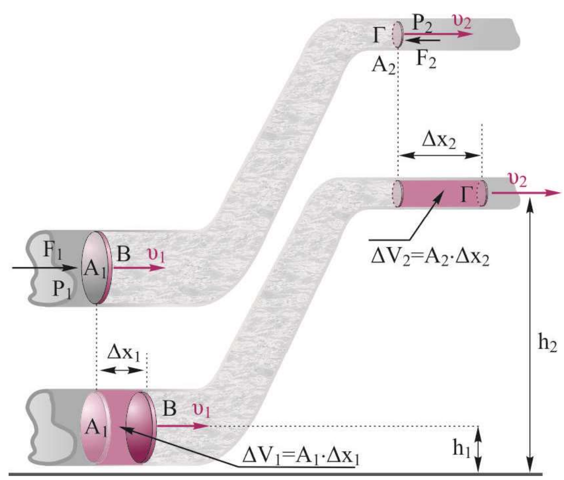
Η **εξίσωση του Bernoulli** είναι μια συνέπεια της αρχής **διατήρησης της ενέργειας** στα ρευστά και διατυπώνεται ως εξής:

Το άθροισμα της πίεσης p, της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του ρευστού $\rho g h$, έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο μιας ρευματικής φλέβας.

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + p + \rho g h = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα ιδανικό (ασυμπίεστο) ρευστό το οποίο ρέει σε πλάγιο σωλήνα μεταβλητής διατομής. Διαλέγουμε δύο σημεία Β και Γ που είναι σημεία της ίδιας ρευματικής γραμμής τα οποία βρίσκονται σε ύψη h_1 και h_2 από το έδαφος αντίστοιχα. Η πίεση στο Β είναι p_1 και στο σημείο αυτό η διατομή του σωλήνα είναι A_1 ενώ στο Γ, p_2 και A_2 ($A_2 < A_1$) αντίστοιχα. Θεωρούμε σαν σύστημα το τμήμα του ρευστού μεταξύ των Β και Γ και ότι αυτό ρέει από το Β προς το Γ. Επειδή η διατομή του σωλήνα από το Β προς το Γ μειώνεται, σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται, άρα το ρευστό επιταχύνεται με τη βοήθεια μιας δύναμης που ασκείται σε αυτό από το περιβάλλον του.



Σε χρονικό διάστημα Δt ένα στοιχειώδες τμήμα μάζας Δm του ρευστού μετατοπίζεται από το Β προς το Γ. Εφαρμόζουμε για το Δm το θεώρημα έργου ενέργειας (ΘΕΕ).

$$K_\Gamma - K_B = W_{F\varepsilon\xi} + W_w$$

SCHOOLDOCTOR

Όπου $W_{Fεξ}$ είναι το έργο που προσφέρεται στο τμήμα του ρευστού που περιέχεται μεταξύ των διατομών A_1 και A_2. Στο τμήμα του ρευστού μεταξύ των διατομών A_1 και A_2 ασκούνται δύο δυνάμεις από το περιβάλλον ρευστό. Στη διατομή A_1 ασκείται η δύναμη F_1 της οποίας το έργο είναι θετικό και στη διατομή A_2 ασκείται η δύναμη F_2 της οποίας το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή

$$W_{F\varepsilon\xi} = F_1\,\Delta x_1 - F_2\Delta x_2 = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 \quad \text{ή}$$

$$W_{F\varepsilon\xi} = p_1\Delta V_1 - p_2\Delta V_2$$

Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, $\Delta V_1=\Delta V_2=\Delta V$.

Και η παραπάνω σχέση γίνεται $W_{F\varepsilon\xi} = (p_1 - p_2)\Delta V$.

Το έργο του βάρους είναι $W_{w(B\to\Gamma)} = U_B - U_\Gamma = -\Delta m g(h_2 - h_1)$ και είναι αρνητικό αφού η στοιχειώδης μάζα Δm κατά τη μετακίνησή της από το Β στο Γ ανεβαίνει.

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\Delta m \upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}\Delta m \upsilon_B^2 = (p_1 - p_2)\Delta V - \Delta m g(h_2 - h_1) \;\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V}\upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V}\upsilon_B^2 = (p_1 - p_2) - \frac{\rho\Delta V}{\Delta V}g(h_2 - h_1) \;\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + p_2 + \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + p_1 + \rho g h_1$$

Επομένως για οποιοδήποτε σημείο ενός ιδανικού ρευστού ισχύει

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + p + \rho g h = \sigma\tau\alpha\theta.$$

που αποτελεί την εξίσωση του Bernoulli.

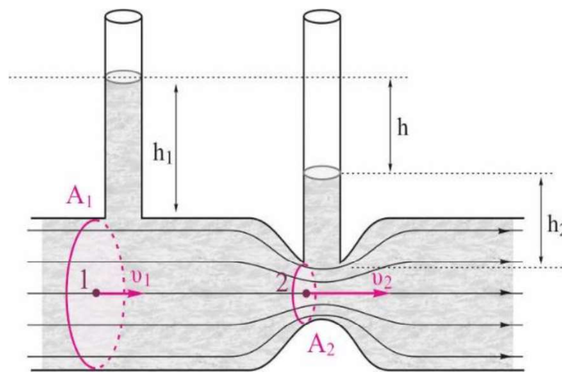
Η παραπάνω εξίσωση όπως είδαμε αποτελεί μια έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στα ρευστά. Η εξίσωση του Bernoulli ισχύει κάτω από τις εξής προϋποθέσεις:

- Το ρευστό είναι ασυμπίεστο,
- Οι τριβές μεταξύ του ρευστού και των τοιχωμάτων του σωλήνα είναι αμελητέες,
- Η ροή είναι στρωτή.

Η εξίσωση Bernoulli σε οριζόντιο σωλήνα.

Σε οριζόντιο σωλήνα, έστω και αν υπάρχουν στενώσεις, κατά τη μετακίνηση του ρευστού θεωρούμε ότι δεν υπάρχει έργο βάρους και η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + p = \sigma\tau\alpha\theta.$$



Το παραπάνω μας δείχνει ότι όπου η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται (στένωση σωλήνα και αύξηση πυκνότητας ρευματικών γραμμών), η πίεση ελαττώνεται και αντίστροφα. Στο σχήμα, παρατηρούμε ότι εφόσον $A_1 > A_2$, έχουμε $\upsilon_1 < \upsilon_2$ και $p_1 > p_2$.

Σχόλια για την εφαρμογή του νόμου του BERNOULLI

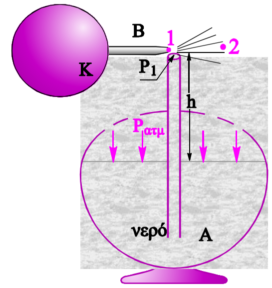
- Σε ένα ακίνητο ρευστό οι προϋποθέσεις εφαρμογής του νόμου του Bernoulli ισχύουν, άρα ο νόμος εφαρμόζεται και σε ακίνητα ρευστά.
- Σε μια οριζόντια φλέβα ανεξάρτητα από στενώσεις θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του ρευστού δεν μεταβάλλεται, οπότε ο όρος $\rho g h$ παραμένει σταθερός.
- Στον όρο <u>ρgh,</u> <u>το h εκφράζει το ύψος της στοιχειώδους μάζας από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας</u>, ενώ στον τύπο της υδροστατικής πίεσης<u>, p=ρgh, το h δηλώνει βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.</u>
- Ένα ρευστό που ρέει σε σωλήνα, μόλις εξέλθει στην ατμόσφαιρα θεωρούμε ότι έχει πίεση ίση με την ατμοσφαιρική, $p_{\alpha\tau\mu}$.
- Ο νόμος του Bernoulli εφαρμόζεται και στα αέρια.
- Τα φαινόμενα ροής γύρω από ένα σώμα είναι ίδια είτε το σώμα κινείται και το ρευστό ηρεμεί, είτε το σώμα ηρεμεί και το ρευστό κινείται με αντίθετη ταχύτητα. Κατά την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli, *όταν έχουμε εμπόδιο που κινείται μέσα σε ακίνητο ρευστό (π.χ. αεροπλάνο), η ταχύτητα που υπεισέρχεται στον τύπο είναι η σχετική ταχύτητα του ρευστού ως προς το εμπόδιο. Δηλαδή, <u>την εξίσωση του Bernoulli την γράφει ο παρατηρητής που βρίσκεται πάνω στο εμπόδιο</u>.*

SCHOOLDOCTOR

Εφαρμογές της εξίσωσης Bernoulli

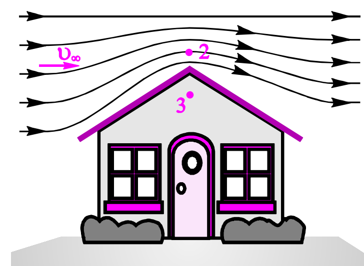
- Ψεκαστήρας.

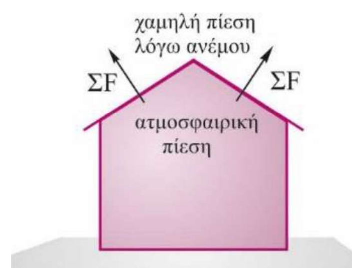
Με τη βοήθεια της ελαστικής κάψας διοχετεύουμε αέρα στον οριζόντιο σωλήνα ο οποίος εξέρχεται από το άκρο του 1. Σύμφωνα με τον Bernoulli, στο σημείο 1 της ρευματικής φλέβας που το ρευστό (αέρας) έχει μεγάλη ταχύτητα, η πίεση είναι μικρότερη από το σημείο 2, που είναι ίση με την $p_{ατμ}$ όση και στην επιφάνεια του υγρού. Έτσι, το υγρό του δοχείου ανέρχεται τον κατακόρυφο σωλήνα και παρασυρόμενο από το οριζόντιο ρεύμα του αέρα εκτοξεύεται υπό μορφή σταγονιδίων.



- Αναρπαγή στέγης

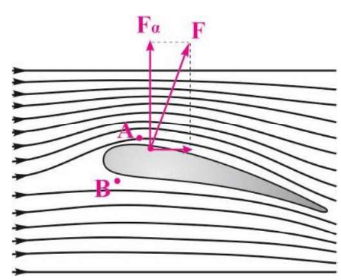
Όταν φυσάει άνεμος οριζόντια με μεγάλη ταχύτητα υπάρχει κίνδυνος αρπαγής μιας στέγης. Καθώς ο άνεμος περνά από το υψηλότερο σημείο της στέγης (σημείο 2 στο σχήμα), υπάρχει στένωση των ρευματικών γραμμών, δηλαδή αύξηση ταχύτητας και σύμφωνα με τον Bernoulli ελάττωση της πίεσης, $p_2 < p_\infty$. Στο εσωτερικό του σπιτιού (σημείο 3) η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική, δηλαδή ακόμα μεγαλύτερη από την p_∞ . Έτσι, λόγω της διαφοράς πίεσης μεταξύ του εσωτερικού και εξωτερικού της στέγης αναπτύσσονται δυνάμεις κάθετες στην επιφάνεια της, με φορά προς τα πάνω, που ξεπερνώντας κάποιο όριο μπορούν να την ξεκολλήσουν.





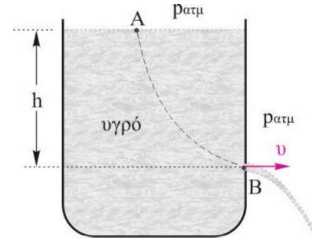
- Δυναμική άνωση και ανύψωση του αεροπλάνου.

Η κίνηση ενός αεροπλάνου είναι η περίπτωση ενός εμποδίου που τρέχει μέσα σε ακίνητο ρευστό. Τα φτερά του αεροπλάνου έχουν τέτοια τομή ώστε όπως αυτό κινείται, να υπάρχει πύκνωση των ρευματικών γραμμών του αέρα στο πάνω μέρος και αραίωση στο κάτω. Η διαφοροποίηση αυτή δημιουργεί διαφοράς πίεσης μεταξύ του κάτω και πάνω μέρους του αεροπλάνου. Η διαφορά πίεσης προκαλεί την άσκηση δύναμης **F**, (**αεροδύναμη**), κάθετης στην επιφάνεια των φτερών. Όταν η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης, **$F_α$** (**δυναμική άνωση**) είναι μεγαλύτερη από το βάρος του αεροπλάνου, αυτό ανέρχεται.



- Θεώρημα Torricelli.

Ένα ανοικτό δοχείο περιέχει υγρό. Σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού υπάρχει μικρή τρύπα από την οποία το υγρό βγαίνει με ταχύτητα υ. Με εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli μεταξύ του σημείου Α της ελεύθερης επιφάνειας και του σημείου Β , που ανήκουν στην ίδια ρευματική φλέβα, υπολογίζεται η ταχύτητα εκροής υ από το σημείο Β. Βρίσκεται ότι είναι ίση με αυτήν που θα είχε αν αφηνόταν να πέσει ελεύθερα από το ίδιο ύψος, δηλαδή $\upsilon = \sqrt{2gh}$. Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα Torricelli.**



SCHOOLDOCTOR