<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2008

<u>ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 10

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x))=x,\quad x\in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y))=y,\quad y\in f(A)$$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x)>0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν:

$$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \quad \text{και} \quad \left|w-(1-i)\right|=\left|w-(3-3i)\right|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x)\ ,$$

για κάθε $x>0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)\,\mathrm{dt} - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=20x^3+6x-45$$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = f(x)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1–1

Μονάδες 3

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία (Σελ. 235 σχολ. βιβλίου).

Α.2 Θεωρία (Σελ. 191 σχολ. βιβλίου).

Β

- **α.** Σωστό
- **β.** Σωστό
- **γ.** Λάθος
- **δ.** Λάθος
- **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η ισότητα $\left|(i+2\sqrt{2})z\right|=6$, γράφεται ισοδύναμα:

$$\left|i+2\sqrt{2}\right|\cdot|z|=6\Leftrightarrow\sqrt{8+1}\cdot|z|=6\Leftrightarrow 3|z|=6\Leftrightarrow|z|=2.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο, ακτίνα $\rho=2$ και εξίσωση (c): $x^2+y^2=2^2$.

β. Η δοσμένη σχέση για τους μιγαδικούς αριθμούς w περιγράφει τη μεσοκάθετο του τμήματος **ΓΔ**, όπου **Γ**(1, −1) και **Δ**(3, −3). Πιο αναλυτικά αν $w=x+yi$ οι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, έχουμε:

$$|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|\Leftrightarrow|x+yi-1+i|=|x+yi-3+3i|\Leftrightarrow$$

$$|(x-1)+(y+1)i|^2=|(x-3)+(y+3)i|^2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2-6x+9+y^2+6y+9\Leftrightarrow$$

$$4x-4y-16=0\Leftrightarrow x-y-4=0.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) είναι τα σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση: $x-y-4=0$.

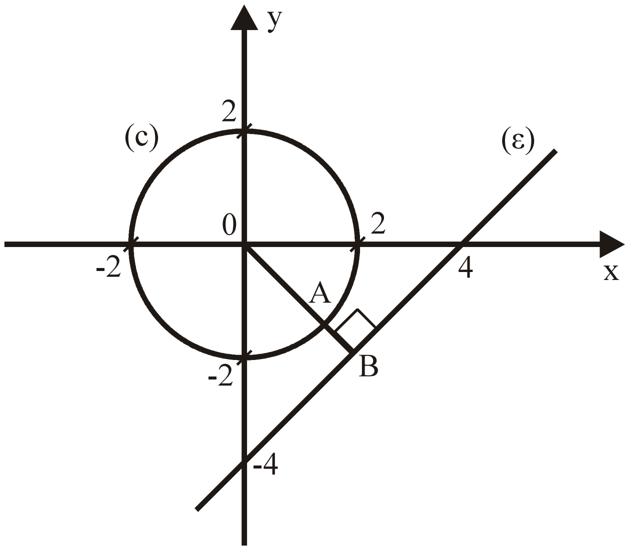
γ. Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η απόσταση του σημείου Ο από την ευθεία

(ε): $x-y-4=0$, δηλαδή:

$$d(O,\varepsilon)=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

δ. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, όπου αναπαριστώνται γεωμετρικά οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων (c), (ε) αντίστοιχα των μιγαδικών αριθμών z και w βρίσκουμε ότι, η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι το μήκος του τμήματος AB:

$$AB = OB - OA = 2\sqrt{2} - \rho = 2(\sqrt{2}-1)\,.$$



ΘΕΜΑ 3ο

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \underset{\text{De l' Hospital}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=\!=}} =$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0\,.$$

Επίσης $f(0)=0$. Συνεπώς f συνεχής στο 0.

β) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών και συνεχής στο 0 λόγω του α.

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Για $x>0$: $f'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		↘		↗	

- Στο $\left[0,\frac{1}{e}\right)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f\left(\left[0,\frac{1}{e}\right)\right)=\left(\lim_{x\to\frac{1}{e}} f(x),\ f(0)\right]=\left(-\frac{1}{e},0\right].$$

- Στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα:

$$f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right).$$

Επομένως: $f([0,\ +\infty))=\left(-\frac{1}{e},\ 0\right]\cup\left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)=\left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)$.

γ.

Επειδή $e^{\frac{a}{x}}>0$, για κάθε $x\neq 0$, για την εξίσωση $x=e^{\frac{a}{x}}$ προκύπτει ο περιορισμός $x\in(0,+\infty)$. Με τον περιορισμό αυτό η εξίσωση $x=e^{\frac{a}{x}}$ γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln x=\ln e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\frac{a}{x} \Leftrightarrow x\ln x=a \Leftrightarrow f(x)=a,\quad x>0 \quad (1).$$

Επειδή το σύνολο των τιμών της f βρέθηκε $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ προκύπτουν οι περιπτώσεις:

i) Αν $a\in(-\infty,-\frac{1}{e})$ η (1) είναι αδύνατη.

ii) Αν $a=-\frac{1}{e}$, η τιμή $-\frac{1}{e}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f την οποία παίρνει μόνον για $x=\frac{1}{e}$.

Έτσι η (1) έχει την ρίζα $x=\frac{1}{e}$.

iii) Αν $a\in(-\frac{1}{e},0)$, επειδή $\left(-\frac{1}{e},0\right)=f\left(\left(0,\frac{1}{e}\right)\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ προκύπτει ότι, η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ που είναι θετική.

Επίσης επειδή $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς άλλη μία ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ που είναι επίσης θετική.

iv) Αν $a=0$ η (1) γίνεται $x\ln x=0\Leftrightarrow x=0$ (απορρίπτεται) ή $\ln x=0\Leftrightarrow x=1$. (Μία ρίζα θετική).

v) Αν $a\in(0,+\infty)$ επειδή $(0,+\infty)\subseteq\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, που είναι θετική.

δ. Είναι $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, x + 1]$, για κάθε $x>0$.
Άρα υπάρχει $\xi\in(x,\ x+1)$: $\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(\xi)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=f'(\xi)\quad(2)$.

Όμως $\xi<x+1\overset{f'\text{ γν. αύξουσα}}{\Longrightarrow}f'(\xi)<f'(x+1)\overset{(2)}{\Longrightarrow}f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Το $\int_0^2 f(t)dt$ είναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι μπορούμε να θέσουμε $\int_0^2 f(t)dt = k \in R$. **(1)**

Τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$ και άρα :

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \left[\left(10t^3 + 3t\right)k - 45\right]dt = \left[k\left(10\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^2}{2}\right) - 45t\right]_0^2 = 40k + 6k - 90 = 46k - 90.$$

(2)

Από τις **(1)**, **(2)** προκύπτει ότι: $k = 46\,k - 90 \Leftrightarrow k = 2$

Οπότε τελικά: $f(x) = (10x^3 + 3x)2 - 45 = 20x^3 + 6x - 45$.

β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{g'(x-h) - g'(x)}{h}\right] =$$

$$\underset{\substack{h \to 0 \\ u \to 0}}{\overset{-h=u}{=\!=\!=}} \lim_{u\to 0}\left[-\frac{g'(x+u) - g'(x)}{-u}\right] = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x),$$

αφού ή g από υπόθεση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

γ) (i) Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)\right]'}{(h^2)'} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h) - g'(x) - g'(x-h) + g'(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[g''(x) + g''(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot g''(x) = g''(x).$$

Οπότε $g''(x) = f(x) + 45 = (20x^3 + 6x - 45) + 45 = 20x^3 + 6x$.

Η $g''(x) = 20x^3 + 6x$ γράφεται:

$$\left(g'(x)\right)' = \left(20\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2}\right)' \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1.$$

Για $x = 0$ έχουμε: $g'(0) = c_1 = 1$. Οπότε $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

Η $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ τώρα γράφεται:

$$g'(x) = \left(5\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3} + x\right)' \Rightarrow g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$$

Για $x = 0$ έχουμε: $g(0) = c_2 = 1$

Άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

(ii) Η $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

Όμως $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και '1–1'.

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2009

<u>ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\varDelta$. Αν η f είναι συνεχής στο $\varDelta$ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του $\varDelta$ ισχύει $f'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα $\varDelta$.

Μονάδες 10

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 2

γ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{συν}\, x - 1}{x} = 1$

Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου $\varOmega$ που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E(\varOmega) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i\,,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Α. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

Α. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 8

Β. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^2 (t-2)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$H(x) = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in [0,2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{H(x)}{x} - \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + 3, & x \in (0,2] \\ 6\displaystyle\lim_{t \to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2].

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει:

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$a\int_0^{\xi} t\, f(t)\,\mathrm{d}t = \xi^2 \int_0^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Μονάδες 7

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία - Θεώρημα σελίδα 251 σχολ. βιβλίου.

Β. Θεωρία - Ορισμός σελίδα 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

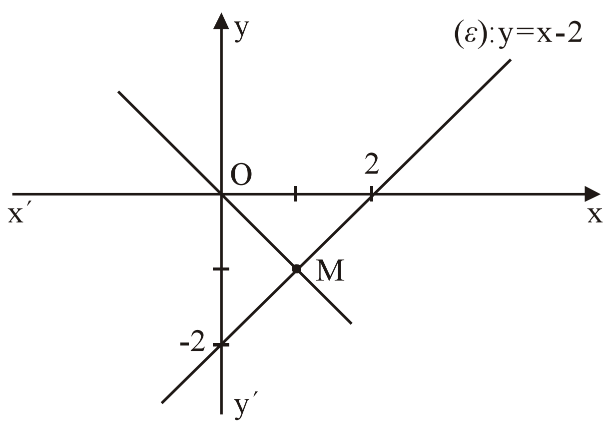
Α.

α. Έστω $z = x + yi$ και $M(x, y)$ η εικόνα του. Τότε $x + yi = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$.

Άρα $x = 2\lambda + 1$ και $y = 2\lambda - 1$. Έτσι όμως $y - x = -2 \Leftrightarrow y = x - 2$.

Δηλαδή οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$.

β. Ο μιγαδικός z_0 με το μικρότερο μέτρο έχει εικόνα το σημείο M για το οποίο είναι $OM \perp (\varepsilon)$.



Αφού $OM \perp (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} = -1$.

Άρα η εξίσωση της OM είναι: $y = -x$.

Οι συντεταγμένες του M (σημείου τομής των OM, ε) προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $y = -x$, $y = x - 2$.

Επομένως $M: \begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Άρα $M(1, -1)$ και $z_0 = 1 - i$.

Β. Έστω $w = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$ γράφεται

$x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 - yi = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 = 1$

και $y = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ και $y = 1 \Leftrightarrow (x = -4$ ή $x = 3)$ και $y = 1$.

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Ισχύει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$. Δηλαδή $\alpha^x - \ln(x + 1) \geq 1$ για κάθε $x > -1$.

Όμως $f(0) = 1$, οπότε $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$.

Επομένως η f παρουσιάζει στη θέση $x = 0$ (ολικό, άρα και τοπικό) ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = a^x \ln a - \dfrac{1}{x+1}$, οπότε $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$.

Β.

α. Για $\alpha = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x + 1)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ και

$$f''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x+1}\right)' = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1, \infty)$ προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, \infty)$, με προφανή ρίζα $x = 0$ που είναι και μοναδική αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι αν $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$, ενώ αν $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $\dfrac{(f(\beta)-1)(x-2)+(f(\gamma)-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \big(f(\beta)-1\big)(x-2)+\big(f(\gamma)-1\big)(x-1)$, με $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική άρα και στο $[1, 2]$.

- $g(1) = -\big(f(\beta)-1\big) = 1 - f(\beta) = f(0) - f(\beta) < 0$, διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\beta \neq 0$,
- $g(2) = f(\gamma) - 1 = f(\gamma) - f(0) > 0$, επίσης διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\gamma \neq 0$.

*(Πιο αναλυτικά είναι $f(0) - f(\beta) < 0$ διότι:

Αν $\beta \in (-1, 0)$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$-1 < \beta < 0 \Rightarrow f(\beta) > f(0) \Rightarrow f(0) - f(\beta) < 0$

Αν $\beta \in (0, +\infty)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$0 < \beta \Leftrightarrow f(0) > f(\beta)$.

Ομοίως προκύπτει $f(\gamma) - f(0) > 0$).

Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \big(f(\beta)-1\big)(x_0-2)+\big(f(\gamma)-1\big)(x_0-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\big(f(\beta)-1\big)(x_0-2)+\big(f(0)-1\big)(x_0-1)}{(x_0-1)(x_0-2)} = 0 .$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

*Παρατήρηση: Θέτοντας χάριν συντομίας $f(\beta) - 1 = \kappa > 0$ και $f(\gamma) - 1 = \lambda > 0$ θα μπορούσαν να δοθούν και οι παρακάτω λύσεις:

α) Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{\kappa}{x-1} + \dfrac{\lambda}{x-2}$ με πεδίο ορισμού το (1, 2) έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \to 1^+$ και $x \to 2^-$ ενώ αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι είναι και γνησίως φθίνουσα στο (1, 2), διότι $h(x) = -\left(\dfrac{\kappa}{(x-1)^2} + \dfrac{\lambda}{(x-2)^2}\right) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$, άρα έχει σύνολο τιμών το $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x), \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = (-\infty, +\infty)$ και άρα το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της δηλαδή η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2).

Επίσης εναλλακτικά από το ότι η h έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \to 1^+$ και $x \to 2^-$, προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί γ, δ ώστε $1 < \gamma < \delta < 2$ με $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα (γ, δ) υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

β) Αλγεβρική λύση:

Θέτοντας $\dfrac{\kappa}{x-1}+\dfrac{\lambda}{x-2}=0,\ \ x\in(1,2)$ προκύπτει $\dfrac{\kappa(x-2)+\lambda(x-1)}{(x-1)(x-2)})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa(x-2)+\lambda(x-1)=0 \Leftrightarrow (\kappa+\lambda)\,x=2\kappa+\lambda \Leftrightarrow\ x=\dfrac{2\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}$.

Η τιμή αυτή είναι αποδεκτή ως ρίζα της εξίσωσης αφού

$$1=\frac{\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}<\frac{2\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}<\frac{2\kappa+2\lambda}{\kappa+\lambda}=2 \text{ (και είναι μάλιστα μοναδική ρίζα).}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Η f συνεχής στο [0, 2] άρα και η $tf(t)$ είναι συνεχής στο [0, 2].

Επομένως η συνάρτηση $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2], άρα είναι και συνεχής.

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2] αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2].

Άρα η G είναι συνεχής στο (0, 2] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης G στη θέση $x_0=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+3\right)=0-0+3=3$, διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x}\ \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{1}=0\cdot f(0)=0.$$

(είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2], και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\int_0^0 tf(t)\mathrm{d}t=0$ διότι η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής, άρα η $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

Επίσης $G(0)=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=$

$=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-1+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\cdot\dfrac{1}{2}=3$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=G(0)=3$.

Άρα η συνάρτηση G είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Επομένως η G είναι συνεχής στο [0, 2].

β. Στο διάστημα (0, 2) είναι:

- η συνάρτηση H παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής, με $H'(x) = xf(x)$.
- η συνάρτηση x παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $(x)' = 1$.

Άρα και η συνάρτηση $\dfrac{H(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$\left(\frac{H(x)}{x}\right)' = \frac{H'(x)\cdot x - H(x)(x)'}{x^2} = \frac{x\cdot f(x)\cdot x - \int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = f(x) - \frac{\int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}.$$

Επίσης στο ίδιο διάστημα, αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ με $\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = f(x) - \frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2},\quad 0 < x < 2.$$

γ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο [0, 2] και παραγωγίσιμη στο (0, 2), με $G(0) = 3$ (από το β ερώτημα).

Βρίσκουμε την τιμή της G στη θέση $x = 2$: $G(2) = \dfrac{H(2)}{2} - \displaystyle\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t + 3 \quad (1).$

Όμως

$$\int_0^2 (t-2)f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^2 tf(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^2 tf(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow H(2) = 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Έτσι λόγω της (1) είναι

$$G(2) = \frac{2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t}{2} - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t + 3 = 3 = G(0).$$

Ισχύουν επομένως για τη συνάρτηση G οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0, 2], άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $G'(\alpha) = 0$.

Όμως από β ερώτημα $G'(\alpha) = -\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}$.

Άρα είναι $H(\alpha) = 0$.

δ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο [0, α] και παραγωγίσιμη στο (0, α). Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in$ (0, α):

$$G'(\xi)=\frac{G(a)-G(0)}{a-0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t+3-3}{\alpha} \overset{H(\alpha)=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$-\frac{\int_0^\xi t\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\xi^2}=-\frac{\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\int_0^\xi t\,f(t)\,\mathrm{d}t=\xi^2\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

***β' τρόπος:**

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει ρίζα στο (0, α), με $\alpha \in (0, 2)$ για την εξίσωση:

$$\alpha\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=x^2\cdot\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \alpha H(x)=x^2\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow -\frac{H(x)}{x^2}=-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G'(x)+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t=0 \Leftrightarrow \left(G(x)+\frac{x}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=0 \qquad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(x)=G(x)+\frac{x}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ (αρχική της $G'(x)+\frac{x}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$), για την οποία έχουμε :

α) είναι συνεχής στο [0, α) ως άθροισμα της συνεχούς G (από το α' ερώτημα) και της πολυωνυμικής $\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right)x$.

β) είναι παραγωγίσιμη στο (0, α) ως άθροισμα της παραγωγίσιμης G (από το β' ερώτημα) και της πολυωνυμικής, $\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right)x$ με $P'(x)=G'(x)+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$.

γ) $P(0) = P(\alpha) = 3$ διότι

$P(0) = G(0) + 0 = 3$ και

$$P(\alpha)=G(\alpha)+\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{H(\alpha)}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t+3+\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{H(\alpha)}{\alpha}+3=\frac{0}{\alpha}+3=3\,.$$

Έτσι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και άρα υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ ώστε

$P'(\xi) = 0 \Leftrightarrow P'(\xi) = 0 \Leftrightarrow G'(\xi) + \dfrac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, δηλαδή αποδείχθηκε ότι η εξίσωση (1)

έχει ρίζα $\xi \in (0, \alpha)$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2010

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής
$$G(x) = F(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$
είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή
$$G(x) = F(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Α2. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B),
όπου $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

δ) $(\text{συν}\, x)' = \text{ημ}\, x,\ \ x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$, όπου $z \in C$ με $z \neq 0$.

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$$

Μονάδες 6

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w-4+3i|=|z_1-z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi'\psi$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-1}^{1} x\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}\,dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, \; x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \left(f(x)\right)^2 - 2x f(x)$, $x\in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+9}, \; x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

SCHOOLDOCTOR

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, θεώρημα, σελίδα 304 σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 279 σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 273 σχολικού βιβλίου.

Α4.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $z+\dfrac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$.

Άρα $z_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i, \quad z_2=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$.

Β2. Είναι: $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}=\left[(1-i)^2\right]^{1005}+\left[(1+i)^2\right]^{1005}=$

$$=(1-2i-1)^{1005}+(1+2i-1)^{1005}=(-2i)^{1005}+(2i)^{1005}=(-2)^{1005}\cdot i^{1005}+2^{1005}\cdot i^{1005}=$$

$$=(-2)^{1005}\cdot(i^2)^{502}\cdot i+2^{1005}\cdot(i^2)^{502}\cdot i=(-2^{1005})\cdot i+(2^{1005})\cdot i=-2^{1005}\cdot i+2^{1005}\cdot i=0$$

<u>2η λύση:</u>

Είναι:

$$(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}= (1-i)^{2010}+\left[i(1-i)\right]^{2010}=$$

$$=(1-i)^{2010}+i^{2010}\cdot(1-i)^{2010}=(1-i)^{2010}\cdot(1+i^{2010})=(1-i)^{2010}\cdot(1-1)=0$$

Β3. Είναι

$|w-4+3i|=|z_1-z_2|=|1-i-1-i|=|-2i|=2$

Έστω $w=x+\psi i$, τότε

$|x+\psi i-4+3i|=2 \quad \Leftrightarrow \quad |(x-4)+(\psi+3)i|=2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)^2+(\psi+3)^2=4$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K\,(4,-3)$ και ακτίνα $\rho=2$.

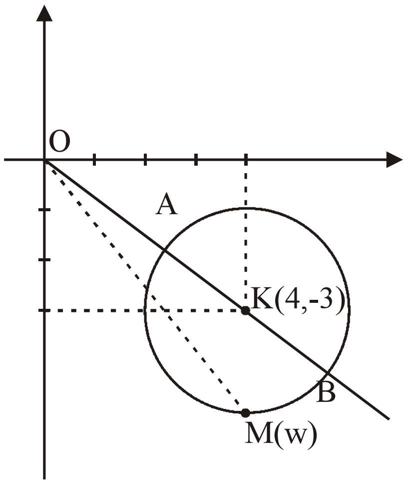
Β4. Το $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(w)$ από την αρχή $O(0,\ 0)$, δηλαδή το μήκος (OM). Από τη Γεωμετρία όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B τότε

$$(OA) \leq (OM) \leq (OB) \quad (1)$$

που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA).

Όμως

- $(OA) = (OK) - \rho = 5 - 2 = 3 \quad (2)$ και
- $(OB) = (OK) + \rho = 5 + 2 = 7 \quad (3)$



Επομένως, λόγω των (1), (2) και (3) έχουμε $3 \leq |w| \leq 7$.

<u>**2η λύση:**</u>

Γράφουμε :

$$|w| = |w + (-4+3i) - (-4+3i)|$$

Οπότε σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||w+(-4+3i)| - |-4+3i|\big| \leq |w+(-4+3i)-(-4+3i)| \leq |w+(-4+3i)| + |-4+3i| \text{ ή}$$

$$\big||z_1 - z_2| - |-4+3i|\big| \leq |w| \leq |z_1 - z_2| + |-4+3i| \quad \text{ή} \quad |2-5| \leq |w| \leq 2+5 .$$

Άρα $3 \leq |w| \leq 7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}.$$

Επειδή $x^2+x+1>0$ καθώς και $x^2+1>0$ για κάθε $x \in \Re$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$2(x^2-3x+2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2(3x-2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4+1) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] + 2(3x-2) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4+1) = 2(3x-2) + \ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x-2) \qquad (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και 1-1.

Επομένως από την (1) προκύπτει

$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$. Άρα $x = 1$ ή $x = 2$.

Γ3. Είναι $f''(x) = \left(2 + \dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = 2\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = 2\dfrac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$$= 2\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$, ενώ είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ και $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Έτσι η C_f έχει σημεία καμπής στα σημεία με τετμημένες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_1 = -1$ έχει εξίσωση (ε_1):

  $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - (-2+\ln 2) = 1(x+1) \Leftrightarrow y = x + \ln 2 - 1$

  Για $x = 0$ προκύπτει $y = \ln 2 - 1$

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_2=1$ έχει εξίσωση (ε_2):

  $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-(2+\ln 2)=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x-1+\ln 2$

  Για $x=0$ προκύπτει $y=\ln 2-1$.

  Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(0,\ \ln 2-1)$ του άξονα $y'y$.

Γ4. $$\int_{-1}^{1} x\,f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(2x^2+x\ln(x^2+1))\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)'\ln(x^2+1)\mathrm{d}x=$$

$$=2\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}[(x^2+1)\ln(x^2+1)]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\left[\ln(x^2+1)\right]'\mathrm{d}x=$$

$$=2\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\frac{2x}{(x^2+1)}\mathrm{d}x=$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{1}=2\frac{2}{3}-\frac{1}{2}(1-1)=\frac{4}{3}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $\varphi(t)=\dfrac{t}{f(t)-t}$ είναι

α) ορισμένη σε όλο το $\Re$ αφού $f(t)\neq t$ για κάθε $t\in\Re$ και
β) συνεχής σε όλο το $\Re$, ως πηλίκο συνεχών.
Έτσι η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t+x+3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με

$$f'(x)=\varphi(x)+1=\frac{x}{f(x)-x}+1=\frac{x+f(x)-x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x},\ x\in\Re.$$

Δ2. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x)=\left[\left(f(x)\right)^2-2x\cdot f(x)\right]'=2f(x)\cdot f'(x)-2f(x)-2x\cdot f'(x)=$$

$$=2f'(x)\left(f(x)-x\right)-2f(x)\overset{(\Delta1)}{=}2\frac{f(x)}{f(x)-x}\left(f(x)-x\right)-2f(x)=0,\ x\in\Re.$$

Άρα η g είναι συνεχής στο $\Re$.

Δ3. Είναι: $f(0)=0+3+\int_0^0\dfrac{t}{f(t)-t}\mathrm{d}t=3$.

Λόγω του **Δ2** είναι $g(x)=c,\ c\in\Re$, για κάθε $x\in\Re$, άρα $\left(f(x)\right)^2-2x\cdot f(x)=c$, για κάθε $x\in\Re$.

Για $x=0$ προκύπτει $c=\left(f(0)\right)^2-2\cdot 0\cdot f(0)=9$.

Έτσι $\left(f(x)\right)^2-2x\cdot f(x)=9 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2-2x\cdot f(x)+x^2=x^2+9 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9.$ (1)

Αν θέσουμε $h(x)=f(x)-x$, έχουμε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\Re$ και $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$, αφού $f(x)\neq x,\ x\in\Re$.

Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$, δηλαδή είναι
ή $h(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$ ή $h(x)<0$ για κάθε $x\in\Re$.

Όμως $h(0)=f(0)-0=3>0$ άρα

$h(x)>0,\ x\in\Re$ και $f(x)>x,\ x\in\Re$. (2).

Από την (1) προκύπτει ότι

$$\left|f(x)-x\right|=\sqrt{x^2+9}\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x)-x=\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\Re.$$

Δ4. Έστω $F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t,\ x\in\Re$.

Είναι $F(x)=\int_c^{x+1} f(t)\mathrm{d}t-\int_c^{x} f(t)\mathrm{d}t,\ x\in\Re,\ c\in\Re$.

και $F'(x)=f(x+1)-f(x),\ x\in\Re$. (1)

Όμως $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}>\dfrac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}}\geq 0,\quad x\in\Re$.

Δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Προκύπτει έτσι: $x<x+1\Rightarrow f(x)<f(x+1)\Rightarrow f(x+1)-f(x)>0,\ x\in\Re$. (2)

Λόγω των (1), (2) η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Επομένως: $x<x+1\Leftrightarrow F(x)<F(x+1)\Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t<\int_{x+1}^{x+2} f(t)\mathrm{d}t$.

<u>**2η λύση:**</u>

Η $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ είναι μια αρχική της f στο $\Re$ και η προς απόδειξη ανισότητα

γράφεται

$$F(x+1)-F(x)<F(x+2)-F(x+1)\Leftrightarrow \frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x}<\frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)}.$$

Από Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x, x + 1]$ και $[x + 1, x + 2]$ προκύπτει ότι υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (x_1, x_1 + 1)$ και $\xi_2 \in (x + 1, x + 2)$ ώστε

$$\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} = F'(\xi_1) = f(\xi_1) \text{ και } \frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)} = F'(\xi_2) = f(\xi_2).$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ή ισοδύναμα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι:

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2+9}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in \Re$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2011

<u>ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

β) Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1–1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x|\text{συν}x = 0\}$ ισχύει: $(\text{εφ}x)' = -\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{ημ}x}{x} = 1$.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\overline{z} + 3i| = 2 \;\text{ και }\; w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\overline{z} + 3i = \dfrac{1}{z - 3i}$.

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$.

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\,(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(e^x-x),\ x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=\text{συν}\,x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x)>0$ και $g(x)>0$

ii) $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,\mathrm{d}t$

iii) $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}\,\mathrm{d}t$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ3 Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x)=\int_1^x f(t^2)\,\mathrm{d}t$$

τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (θεώρημα Fermat) σχολικό βιβλίο, σελ. 260-261.

Α2. Θεωρία (ορισμός) σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

Α3.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε από υπόθεση ότι:

$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \qquad (1)$

Όμως $|\bar{z}+3i|=|\overline{\bar{z}+3i}|=|z-3i| \qquad (2)$

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1 \qquad (3)$.

Αν $z=x+yi$ η (3) γράφεται: $|x+(y-3)i|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,\, 3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Β2. Από το ερώτημα Β1 έχουμε: $|z-3i|=1$

Οπότε $|z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\left(\bar{z}+3i\right)=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$.

Β3. Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο w γράφεται

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)\in R.$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z έχουμε ότι: $x^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Και επειδή $x=\mathrm{Re}(z)$ προκύπτει ότι: $-1\le \mathrm{Re}(z)\le 1$.

Οπότε: $-2\le 2\mathrm{Re}(z)\le 2$. Άρα $-2\le w\le 2$.

Β4. Είναι: $|z-w|=\left|z-z+3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=\left|3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=|3i-\bar{z}-3i|=|-\bar{z}|=|z|$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(e^x)' \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) - (e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow$$

$$(e^x \cdot f'(x) - e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) + c_1,\ c_1 \in R$$

Για $x = 0$ προκύπτει: $e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f'(0) + c_1$

και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι $c_1 = -1$.

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left[\ln(e^x - x)\right]' \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c_2.$$

Για $x = 0$ προκύπτει $c_2 = 0$.

Έτσι $f(x) = \ln(e^x - x)$.

(*) Αν θέσουμε $h(x) = e^x - x,\ x \in \mathbb{R}$, είναι: $h'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0.$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h′	−	0	+
h	$\searrow$	1	$\nearrow$

Έτσι η h έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$ την τιμή $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Δηλαδή $h(x) \geq 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$..

Γ2. Είναι $f'(x) = \left[\ln(e^x - x)\right]' = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

Λόγω της παρατήρησης (*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της f εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητού $h'(x) = e^x - 1$.

Συνεπώς $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Άρα η f είναι: γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,\, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=0$ την τιμή $f(0)=\ln(e^0-0)=\ln 1=0$.

Γ3. Είναι: $f''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\dfrac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-x\right)'}{\left(e^x-x\right)^2}=$

$$=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}-xe^x-(e^{2x}-2e^x+1)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}.$$

Θέτουμε $\varphi(x)=(2-x)e^x-1,\;\; x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$\varphi'(x)=-e^x+(2-x)\cdot e^x=e^x\,(1-x)$

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=1$

$\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow \mathrm{x}<1$

$\varphi'(x)<0 \Leftrightarrow \mathrm{x}>1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Φ′	+	0	−
Φ	↗	e − 1	↘

Προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1,\, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο $\varphi(1)=e-1>0$.

Βρίσκουμε τώρα τα όρια της φ στα $-\infty$, $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(2-x)\cdot e^x-1\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2-x)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2-x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{e^{-x}}=0$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=-1$.

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της φ είναι

$$\varphi\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}\varphi(x),\varphi(1)\right]=(-1,e-1].$$

$$\varphi\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),\varphi(1)\right]=(-\infty,e-1].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0\in\varphi\left((-\infty,1]\right)$ άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,1]$ ώστε $\varphi(x_1)=0$.

  Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του x_1 αλλάζει πρόσημο. Διότι με $x<x_1$ είναι $\varphi(x)<\varphi(x_1)\ \Leftrightarrow\ \varphi(x_1)<0$

  Ενώ με $1>x>x_1$ είναι $\varphi(x)>\varphi(x_1)\ \Leftrightarrow\ \varphi(x)>0$.

  Έτσι ισοδύναμα (επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$) η f'' έχει μία μόνο ρίζα στο $(-\infty,1]$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα $0\in\varphi\left([1,+\infty]\right)$ άρα υπάρχει $x_2\in[1,+\infty)$, ώστε $\varphi(x_2)=0$. Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του x_2 αλλάζει πρόσημο.

  Διότι με $1<x<x_2$ είναι $\varphi(x)>\varphi(x_2)\ \Leftrightarrow\ \varphi(x)>0$

  Ενώ με $x>x_2$ είναι $\varphi(x)<\varphi(x_2)\ \Leftrightarrow\ \varphi(x)<0$.

  Έτσι η f'' έχει επίσης μία μόνο ρίζα x_2 στο $[1,+\infty)$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις x_1, x_2.

Γ4. Θέτουμε $g(x)=\ln(e^x-x)-\text{συν}\,x=f(x)-\text{συν}\,x,\ \ x\in\mathbb{R}$.

- Ύπαρξη : Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

  Είναι $g(0)=f(0)-\text{συν}(0)=-1<0$

  $$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\text{συν}\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

  Όμως $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα είναι $\frac{\pi}{2}>0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.

Έτσι $g(0)\cdot g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano η g έχει μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

- Μοναδικότητα:

Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

Έστω $x_1,x_2\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ τότε

$f(x_1)<f(x_2)$ διότι $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$

$\text{συν}\,x_1>\text{συν}\,x_2$ διότι $\text{συν}\,x\downarrow$ στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Άρα $-\text{συν}\,x_1<-\text{συν}\,x_2$.

Έτσι όμως $f(x_2)-\text{συν}\,x_1<f(x_2)-\text{συν}\,x_2$, άρα $g(x_1)<g(x_2)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

<u>Παρατήρηση (2[ος] τρόπος για τη μονοτονία):</u>

Η μονοτονία της g στο $[0,\pi/2]$ μπορεί να προκύψει και ως εξής: $g'(x)=f'(x)+\text{ημ}x$.
Όμως $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα και για κάθε $x\in(0,\pi/2)$,
ενώ επίσης $\text{ημ}x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi/2)$.
Άρα $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi/2)$ και επομένως g γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi/2]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,\mathrm{d}t$$

Θέτουμε: $x+t=u\Leftrightarrow t=u-x$. Οπότε: $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$.

Ακόμη για $t=0$ έχουμε $u=x$ και για $t=-x$ έχουμε $u=0$.

Επομένως:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)}\,\mathrm{d}u=\int_x^0 e^{-2x}\frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u=e^{-2x}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x)=-e^{2x}e^{-2x}\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u \Leftrightarrow 1-f(x)=-\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u$$

Άρα $f(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u \quad (1)$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$$g(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\mathrm{d}u \quad (2)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο $[0,\ x]$ με $x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\mathrm{d}u$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, επομένως και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}$$

οπότε $f'(x)g(x)=e^{2x}$ και $g'(x)f(x)=e^{2x}$

άρα

$$f'(x)g(x)=g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0 \overset{g(x)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι: $\frac{f(x)}{g(x)}=c$

και επειδή $f(0)=g(0)\overset{(1)\&(2)}{=}1$, θα είναι c = 1.

Άρα $f(x)=g(x)$.

Δ2. Επειδή είναι:

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow \quad \text{(Ερώτημα Δ1)}$$

$$f'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα (συνέπεια του Θ.Μ.Τ.) έχουμε:

$f^2(x)=e^{2x}+c$

Όμως $f(0)=1$, οπότε $c=0$.

Άρα $f^2(x)=e^{2x} \Leftrightarrow [f(x)]^2=\left[e^x\right]^2 \Leftrightarrow |f(x)|=e^x$

Και επειδή $f(x)>0$, προκύπτει ότι $f(x)=e^x$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\left(x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}(De\,L'Hospital)\ (*)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{-1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{-1}{x}}=-\infty .$$

(*): Θέτουμε $\frac{1}{x}=y$ οπότε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{e^{-y}}{y}:\ \frac{+\infty}{-\infty}$.

Δ4. Είναι $F'(x)=f(x^2)>0$. Άρα η $F \uparrow$ στο [0, 1].

Άρα για $0\le x\le 1$ θα είναι $F(x)\le F(1)$ και επειδή $F(1)=0$, προκύπτει ότι $F(x)\le 0$ $\forall\, x\in[0,1]$.

Επομένως $\forall\, x\in[0,1]$, θα είναι:

$$E=-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x'F(x)\mathrm{d}x=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)\mathrm{d}x=$$

$$=-F(1)+\int_0^1 x\left(\int_1^x f(t^2)\right)'\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x^2)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)\ \text{τ.μ.}$$

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2012

<u>ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $Δ$. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του $Δ$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $Δ$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$;

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Μια συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

γ) Αν είναι $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

δ) $(\sigma\varphi\, x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu\, x = 0\}$

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[α,β]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \qquad (1)$$

$$|w - 5\overline{w}| = 12 \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $ρ = 1$

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z-w| \leq 4$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1, \quad x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}, \quad x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e\right)\cdot|f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x)=e^{-x}(\ln x - x), \quad x>0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \le x-1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt, \quad x>0,$$

όπου $\alpha>0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x)+F(3x) > 2F(2x), \text{ για κάθε } x>0 \text{ (μονάδες 4).}$$

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$$

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 253, σχολικού βιβλίου.
Α2. Θεωρία, σελ. 191, σχολικού βιβλίου.
Α3. Θεωρία, σελ. 258, σχολικού βιβλίου.
Α4. **α)** $\to$ Σ, **β)** $\to$ Σ, **γ)** $\to$ Λ, **δ)** $\to$ Λ, **ε)** $\to$ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. α΄ τρόπος: Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, η σχέση (1) γράφεται

$$|(x-1)+yi|^2 + |(x+1)+yi|^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

β΄ τρόπος: Η σχέση (1) γράφεται:

$$(z-1)\cdot(\overline{z-1}) + (z+1)\cdot(\overline{z+1}) = 4 \Leftrightarrow (z-1)\cdot(\overline{z}-1) + (z+1)\cdot(\overline{z}+1) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\overline{z} - z - \overline{z} + 1 + z\cdot\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow 2\cdot z\cdot\overline{z} = 2 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2. Έστω $|z_1 + z_2| = k,\ k \ge 0.$ Τότε

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1 - z_2}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2) = 2 \quad (2\alpha)$$

$$|z_1 + z_2| = x \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = x^2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = x^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = x^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2) = x^2 \quad (2\beta).$$

Προσθέτοντας τις (2α), (2β) κατά μέλη έχουμε: $2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = k^2 + 2.$

Όμως $|z_1| = 1,\quad |z_2| = 1$ οπότε προκύπτει $k^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt{2},$ αφού $k \ge 0.$

Β3. $|w - 5\overline{w}| = 12 \Leftrightarrow |w - 5\overline{w}|^2 = 12^2 \Leftrightarrow (w - 5\overline{w})\cdot(\overline{w} - 5w) = 144 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow w\overline{w} - 5w^2 - 5\overline{w}^2 + 25w\overline{w} = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 - 5(w^2 + \overline{w}^2) + 25|w|^2 = 144 \Leftrightarrow 26|w|^2 - 5(w^2 + \overline{w}^2) = 144 \qquad (3)$$

Έστω $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ τότε η σχέση (3) γίνεται:

$$26(\sqrt{x^2 + y^2})^2 - 5\left[(x+yi)^2 + (x-yi)^2\right] = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 26(x^2 + y^2) - 5(x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 - y^2 - 2xyi) = 144 \Leftrightarrow$$

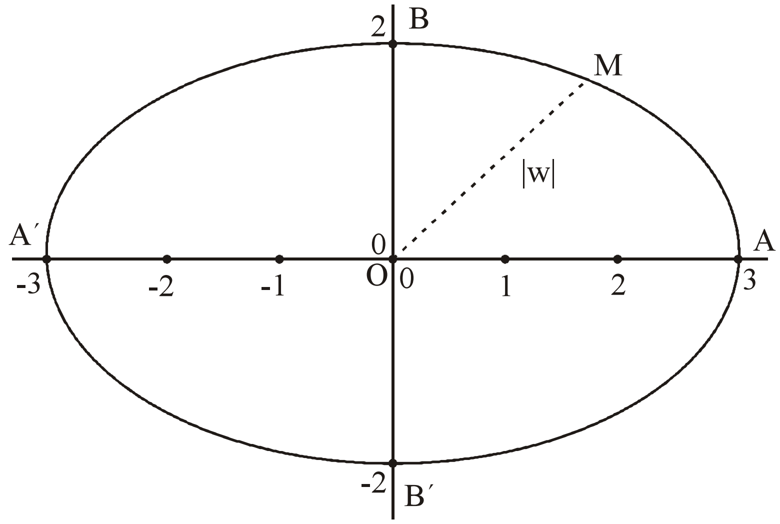
$\Leftrightarrow 26x^2 + 26y^2 - 5(2x^2 - 2y^2) = 144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 26x^2 + 26y^2 - 10x^2 + 10y^2 = 144 \Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η παραπάνω έλλειψη με μήκος μεγάλου ημιάξονα $a = 3$ και μήκος μικρού ημιάξονα $\beta = 2$.

Είναι όμως γνωστό (μαθ. κατεύθυνσης Β Λυκείου, σελίδα 104) ότι για οποιοδήποτε σημείο M της έλλειψης ισχύει ότι $2\beta \le 2OM \le 2\alpha$ ή $\beta \le OM \le \alpha$.
Αν Α΄, Α, Β΄, Β οι κορυφές της έλλειψης, τότε: $A'(-3,0)$, $A(3, 0)$, $B'(0, -2)$, $B(0, 2)$.
Έτσι $|w|_{\max} = (OA) = (OA') = 3$ και $|w|_{\min} = (OB) = (OB') = 2$.



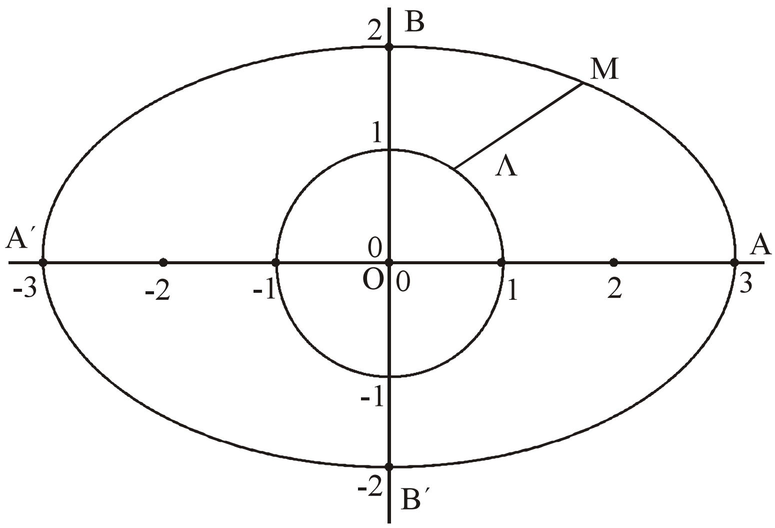
<u>Παρατήρηση 1:</u> Το παραπάνω σχήμα είναι επιβοηθητικό της κατανόησης από τους μαθητές και δεν είναι απαραίτητο για τη λύση του ερωτήματος.

B4. Με βάση την τριγωνική ανισότητα και επειδή $|z - w| = |w - z|$ έχουμε:

$\big||w| - |z|\big| \le |w - z| \le |w| + |z| \Leftrightarrow \big||w| - 1\big| \le |w - z| \le |w| + 1 \qquad (4)$

Όμως λόγω του B_3 είναι $2 \le |w| \le 3$, άρα: $|w| - 1 \ge 1$ και $|w| + 1 \le 4$.

Τότε όμως η (4) γράφεται: $1 \le |w - z| \le 4$.



Η παραπάνω ανίσωση είναι η αλγεβρική έκφραση της $1 \le (\Lambda M) \le 3$, με $(O\Lambda) = |z|$, $OM = |w|$ και $(\Lambda M) = |z - w|$ η οποία προκύπτει από το παραπάνω σχήμα.

Παρατήρηση 2: Το σχήμα και εδώ δεν είναι απαραίτητο. Θα μπορούσε όμως πιθανώς και μια τέτοια «γεωμετρική λύση», αν και όχι τόσο αυστηρή όσο η αλγεβρική, να γίνει κατά ένα ποσοστό μονάδων βαθμολογίας αποδεκτή ανεξάρτητη λύση, καθόσον αναδεικνύει κατανόηση της έννοιας της μετρικής στο μιγαδικό επίπεδο.

Παρατήρηση 3:
Τα δύο πρώτα ερωτήματα του δεύτερου θέματος θα μπορούσαν να απαντηθούν χρησιμοποιώντας την άσκηση Α9 του σχολ. Βιβλίου σελ. 101, γνωστή ως κανόνα του παραλληλογράμμου (αφού πρώτα αποδειχθεί) :
Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

Απόδειξη:
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) + (z_1 - z_2)(z_1 - \overline{z}_2)$$
$$= z_1\overline{z}_1 + \overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_1 - \overline{z}_1 z_2 - z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_2 = 2z_1\overline{z}_1 + 2z_2\overline{z}_2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

Β1. γ΄ τρόπος: για $z_1 = z$ και $z_2 = 1$ έχουμε :
$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 2|z|^2 + 2|1|^2 \Leftrightarrow$$
$$4 = 2|z|^2 + 2 \Leftrightarrow 2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2. β΄ τρόπος: Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε ότι
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \Leftrightarrow$$
$$|z_1 + z_2|^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$
$$|z_1 + z_2|^2 + 2 = 2 + 2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, $x \in (0\ +\infty)$.

- Όταν $x \in (0,\ 1)$ είναι $x < 1$ και επειδή η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $\ln x < \ln 1 \ \Leftrightarrow\ \ln x < 0$. Επίσης $x - 1 < 0$ και $x > 0$ άρα $\frac{x-1}{x} < 0$.

  Έτσι $\ln x + \frac{x-1}{x} < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$.

- Όταν $x \in (1, +\infty)$ είναι $x > 1$ και επειδή lnx γνησίως αύξουσα είναι $\ln x > \ln 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln x > 0$. Επίσης είναι $\frac{x-1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε $\ln x + \frac{x-1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Έτσι όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβλητών για την f:

x	0		1		$+\infty$
f′	‖	−	0	+	
f	‖	↘		↗	
			min (-1)		

Επειδή f γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ είναι $f\big((0,1]\big) = \Big[f(-1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Big)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\big[(x-1)\ln x - 1\big] = +\infty$.

Άρα $f\big((0,1]\big) = [-1, +\infty)$ (1).

Επίσης επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ είναι

$f\big([1,+\infty)\big) = \Big[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\Big)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\big[(x-1)\ln x - 1\big] = +\infty$.

Άρα $f\big([1,+\infty)\big) = [-1, +\infty)$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, +\infty)$.

<u>Παρατήρηση:</u> Η μονοτονία της f στα διαστήματα $(0,\ 1]$ και $[1,\ +\infty)$ μπορεί να προκύψει και από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου:

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και επειδή $f'(1) = 0$ η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$. Ακόμη, είναι:

- $0 < x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο (0, 1].
- $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x = 1$ το $f(1) = (1-1)\cdot\ln 1 - 1 = -1$.

Γ2. Η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$ (επειδή η συνάρτηση $y = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1–1) γράφεται ισοδύναμα:

$\ln(x^{x-1}) = \ln(e^{2013}) \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) - 2012 = 0$.

Από το $Γ_1$ ερώτημα είναι:

α) $f\left((0,1]\right) = [-1, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0, 1]$ ώστε $f(x_1) = 2012$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1–1, άρα η τιμή x_1 είναι μοναδική στο διάστημα $(0,1]$.

β) $f\left([1,+\infty]\right) = [-1, +\infty)$, άρα υπάρχει $x_2 \in [1, +\infty)$ ώστε $f(x_2) = 2012$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1–1, άρα η τιμή x_2 είναι μοναδική στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Από α) και β) προκύπτει ότι η δοσμένη εξίσωση έχει 2 ακριβώς θετικές ρίζες.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x f(x) - 2012\cdot e^x$ με $x \in (0, +\infty)$.

- Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = \left(f'(x) + f(x) - 2012\right)e^x$.
- $h(x_1) = e^{x_1} f(x_1) - 2012\cdot e^{x_1} = 2012\cdot e^{x_1} - 2012\cdot e^{x_1} = 0$

  $h(x_2) = e^{x_2} f(x_2) - 2012\cdot e^{x_2} = 2012\cdot e^{x_2} - 2012\cdot e^{x_2} = 0$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την h στο $[x_1, x_2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, ώστε $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$e^{x_0}\left(f'(x_0) + f(x_0) - 2012\right) = 0 \overset{e^{x_0}\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x_0) + f(x_0) - 2012 = 0$.

<u>Β΄ τρόπος</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) + f(x) - 2012$ με $x > 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών.

Η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών.

Άρα η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών.

- Άρα η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$.
- $h(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 \overset{Γ2}{=} f'(x_1) + 2012 - 2012 = f'(x_1) < 0$, αφού από το Γ1 για $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$.
- $h(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 \overset{Γ2}{=} f'(x_2) + 2012 - 2012 = f'(x_2) > 0$, αφού από το Γ1 για $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$.

Δηλαδή είναι $h(x_2)\cdot h(x_2) < 0$. Από το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε:

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) - 2012 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

Γ4. Είναι: $g(x) = f(x)+1 = (x-1)\ln x - 1 + 1 = (x-1)\ln x > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Άρα: $E(\Omega) = \int_1^e (x-1)\ln x dx = \int_1^e x\ln x dx - \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (\frac{x^2}{2})' \ln x dx - \int_1^e (x)' \ln x dx =$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx - [x\ln x]_1^e + \int_1^e dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e xdx - e + [x]_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e - e + e - 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2-3}{4} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e}, \quad x \in (0,+\infty).$$

$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt = H(x^2 - x + 1)$, όπου $H(x) = \int_1^x f(t)dt$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο στο $(0, +\infty)$. Επίσης η $y = x^2 - x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική, άρα και η $H(x^2 - x + 1)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επίσης παραγωγίσιμη είναι και η $-\frac{x-x^2}{e}$ ως πολυωνυμική. Έτσι η G είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $G'(x) = f(x^2-x+1)(2x-1) - \frac{1}{e}(1-2x)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Η δοσμένη σχέση $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$ επειδή $G(1) = 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e} \geq 0 \Leftrightarrow G(x) \geq G(1), \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Η συνάρτηση G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ που είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$.

Από το θεώρημα Fermat προκύπτει τότε ότι $G'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$.

Επειδή η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$, είναι $f(x) < 0$, $x \in (0,+\infty)$.

Έτσι $|f(x)| = -f(x)$ και από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)(f(x)).$$

Για τη συνάρτηση $h(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$ ισχύει $h(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, διότι αν υπήρχε $\xi \in (0,+\infty)$ ώστε $h(\xi) = 0$ τότε θα ήταν $\ln\xi - \xi = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή για τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x - x$ ισχύει $\varphi(x) \leq -1 < 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ (σύμφωνα με τη γνωστή εφαρμογή στη σελ.266 του σχολ. βιβλίου) αλλά μπορεί και να αποδειχθεί: $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$ οπότε όπως προκύπτει από τον πίνακα μεταβολών της φ είναι $\varphi(x)\le -1<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

x	0		1		$+\infty$
φ΄(x)	‖	+	0	−	
φ(x)	‖	↗		↘	
			max φ(1) = -1		

(*) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x-x}{\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, ενώ προκύπτει $\dfrac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x \dfrac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$.

Οι συναρτήσεις και στα δύο μέλη είναι παραγωγίσιμες οπότε:

$\left(\dfrac{\ln x-x}{f(x)}\right)'=\left(\int_1^x \dfrac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)'$, άρα $\left(\dfrac{\ln x-x}{f(x)}\right)'=\dfrac{\ln x-x}{f(x)}$.

Αν θέσουμε $g(x)=\dfrac{\ln x-x}{f(x)}$ έχουμε $g'(x)=g(x)$ για κάθε x ∈ (0, +∞), οπότε σύμφωνα με την εφαρμογή της σελίδας 252 του σχολικού βιβλίου είναι:

$g(x)=ce^x$, δηλαδή $\dfrac{\ln x-x}{f(x)}=ce^x$.

Για $x=1$ προκύπτει $\dfrac{-1}{f(1)}=c\cdot e \Leftrightarrow e=c\cdot e\Leftrightarrow c=1$.

Άρα τελικά $f(x)=\dfrac{\ln x-x}{e^x}=e^{-x}(\ln x-x)$, $x\in(0,+\infty)$.

(*) Παρατήρηση:

Από το σημείο αυτό θα μπορούσε να ακολουθηθεί και η εξής πορεία:

Για την συνάρτηση $h(x)=\int_1^x \dfrac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$ έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ διότι η $\dfrac{\ln t-t}{f(t)}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Είναι $h'(x)=\dfrac{\ln x-x}{f(x)}$, οπότε από την σχέση $\ln x-x=\left(\int_1^x \dfrac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)(f(x))$ προκύπτει $\ln x-x=h(x)f(x)\Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln x-x}{f(x)}=h(x)\Leftrightarrow h'(x)=h(x)$, $x\in(0,+\infty)$. Τότε όμως είναι $h(x)=ce^x$.

Επειδή $h(1)=1$ προκύπτει $c=1$, άρα $h(x)=e^x$.

Δηλαδή $\dfrac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x),\ x \in (0,+\infty)$.

Δ2. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}(\ln x - x) = -\infty$.

Τότε όμως $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Αν θέσουμε $\dfrac{1}{f(x)} = u$ έχουμε $u<0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{u\to 0^-}\left[\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}\right] = \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu u - u}{u^2}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u}\right) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Δ3. Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $F'(x) = f(x)$ και

$$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\left[\frac{1}{x} + (x - 1 - \ln x)\right].$$

Επειδή $x - 1 - \ln x \geq 0$ και $\dfrac{1}{x} > 0$, για κάθε x>0 είναι $F''(x) > 0$, για κάθε x>0.

Άρα η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Η σχέση τώρα $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, x>0 γράφεται:

$$F(3x) - F(2x) > F(2x) - F(x),\ x>0 \Leftrightarrow \frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x} > \frac{F(2x)-F(x)}{2x-x},\ x>0.$$

Από Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$ αντίστοιχα υπάρχουν

$\xi_1 \in (x, 2x)$ και $\xi_2 \in (2x, 3x)$ ώστε $F'(\xi_1) = \dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$ και $F'(\xi_2) = \dfrac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}$,

οπότε αρκεί να δειχθεί ότι $F'(\xi_2) > F'(\xi_1)$ με $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$. Η τελευταία είναι αληθής διότι η F είναι κυρτή και άρα η F' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta),\ x \in [\beta, 2\beta]$.

Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και η h.

$h(\beta) = F(\beta) - F(3\beta)$

$h(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta)$.

Επειδή $F'(x) = f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Έτσι από $\beta < 3\beta$ έπεται: $F(\beta) > F(3\beta) \Leftrightarrow F(\beta) - F(3\beta) > 0 \Leftrightarrow h(\beta) > 0$.

Λόγω τώρα του Δ3 είναι $h(\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$.

Άρα $h(\beta)\cdot h(2\beta) < 0$, οπότε λόγω του θεωρ. Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$.

Η τιμή ξ είναι μοναδική διότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1–1, αφού $h'(x) = F'(x) = f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΦΥΣΙΚΗ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2013

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

*Στις ερωτήσεις **Α1-Α4** να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση, η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση.*

Α1. Περιπολικό ακολουθεί αυτοκίνητο που έχει παραβιάσει το όριο ταχύτητας. Τα δύο αυτοκίνητα κινούνται με ίσες ταχύτητες. Αν η σειρήνα του περιπολικού εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S, τότε, η συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται ο οδηγός του άλλου αυτοκινήτου είναι:

α) $f_A = 2 f_S$

β) $f_A = \frac{1}{2} f_s$

γ) $f_A = f_S$

δ) $f_A = 0$

Μονάδες 5

Α2. Διακρότημα δημιουργείται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, με ίδιο πλάτος, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, όταν οι ταλαντώσεις αυτές έχουν:

α) ίσες συχνότητες και ίδια φάση

β) ίσες συχνότητες και διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$

γ) παραπλήσιες συχνότητες

δ) ίσες συχνότητες και διαφορά φάσης π.

Μονάδες 5

Α3. Σε μια μηχανική ταλάντωση της οποίας το πλάτος φθίνει χρονικά ως $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, όπου A_0 είναι το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης και Λ είναι μια θετική σταθερά, ισχύει ότι:

α) οι μειώσεις του πλάτους σε κάθε περίοδο είναι σταθερές.

β) η δύναμη αντίστασης είναι $F_{αντ} = -b\,\upsilon^2$, όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης και υ η ταχύτητα του σώματος που ταλαντώνεται.

γ) η περίοδος T της ταλάντωσης μειώνεται με το χρόνο για μικρή τιμή της σταθεράς απόσβεσης b.

δ) η δύναμη αντίστασης είναι $F_{αντ} = -b\,\upsilon$, όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης και υ η ταχύτητα του σώματος που ταλαντώνεται.

Μονάδες 5

Α4. Κατά τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό, σε μεγάλη απόσταση από την πηγή, ισχύει ότι:

α) στη θέση που η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, η ένταση Β του μαγνητικού πεδίου είναι μέγιστη

β) τα διανύσματα των εντάσεων E του ηλεκτρικού και B του μαγνητικού πεδίου είναι παράλληλα μεταξύ τους

γ) το διάνυσμα της έντασης E του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος

δ) το διάνυσμα της έντασης B του μαγνητικού πεδίου είναι παράλληλο στη διεύθυνση διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Μονάδες 5

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Το όζον της στρατόσφαιρας απορροφά κατά κύριο λόγο την επικίνδυνη υπεριώδη ακτινοβολία.

β) Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητας του σώματος που ταλαντώνεται καθώς αυξάνεται το μέτρο της δύναμης επαναφοράς.

γ) Κατά τη διάδοση μηχανικού κύματος μεταφέρεται ορμή από ένα σημείο του μέσου στο άλλο.

δ) Σε στερεό σώμα σφαιρικού σχήματος που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα διερχόμενο από το κέντρο του ισχύει πάντα $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$.

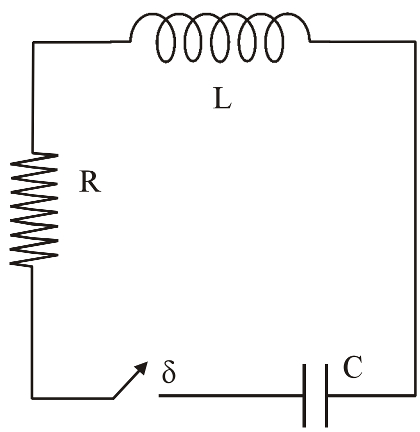
ε) Έκκεντρη ονομάζεται η κρούση κατά την οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των δύο σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες αλλά μη συγγραμμικές.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Β1. Στο κύκλωμα του σχήματος ο πυκνωτής χωρητικότητας $C = 20 \times 10^{-6}$ F είναι φορτισμένος σε τάση Vc = 20 V και το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = \frac{1}{9} \times 10^{-3}$ H.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κλείνουμε το διακόπτη δ. Κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_1, το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδέν και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι 6 Α. Από τη στιγμή t_0 έως τη στιγμή t_1 η συνολική ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης μειώθηκε κατά:



i) 1×10^{-3} J

ii) 2×10^{-3} J

iii) 4×10^{-3} J

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

Β2. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ που βρίσκονται αντίστοιχα στα σημεία K και $Λ$ της επιφάνειας υγρού παράγουν πανομοιότυπα εγκάρσια αρμονικά κύματα με ίδιο πλάτος, ίσες συχνότητες f_1 και ίσα μήκη κύματος $λ_1$. Αν η απόσταση των σημείων K και $Λ$ είναι $d = 2\,λ_1$, τότε δημιουργούνται τέσσερις υπερβολές απόσβεσης, μεταξύ των σημείων K και $Λ$.

Αλλάζοντας την συχνότητα των δύο πηγών σε $f_2 = 3\,f_1$ και διατηρώντας το ίδιο πλάτος, ο αριθμός των υπερβολών απόσβεσης, που δημιουργούνται μεταξύ των δύο σημείων K και $Λ$, είναι:

i) 6
ii) 8
iii) 12

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

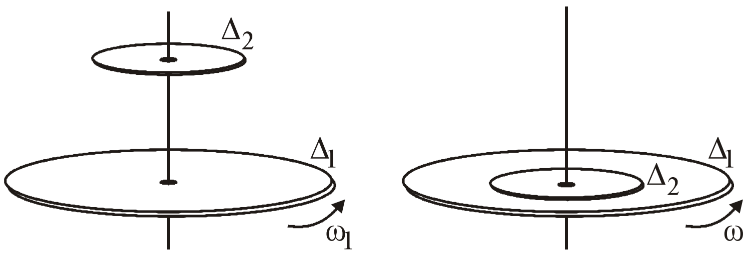
β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Ένας δίσκος $Δ_1$ με ροπή αδράνειας I_1 στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $ω_1$ και φορά περιστροφής όπως φαίνεται στο σχήμα, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

Ένας δεύτερος δίσκος $Δ_2$ με ροπή αδράνειας $I_2 = \frac{I_1}{4}$, που αρχικά είναι ακίνητος, τοποθετείται πάνω στο δίσκο $Δ_1$, ενώ αυτός περιστρέφεται, έτσι ώστε να έχουν κοινό άξονα περιστροφής, που διέρχεται από τα κέντρα των δύο δίσκων, όπως δείχνει το σχήμα.

Μετά από λίγο οι δύο δίσκοι αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα $ω$.



Αν L_1 είναι το μέτρο της αρχικής στροφορμής του δίσκου $Δ_1$, τότε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του δίσκου $Δ_1$ είναι:

i) 0
ii) $\frac{1}{5}L_1$
iii) $\frac{2}{5}L_1$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

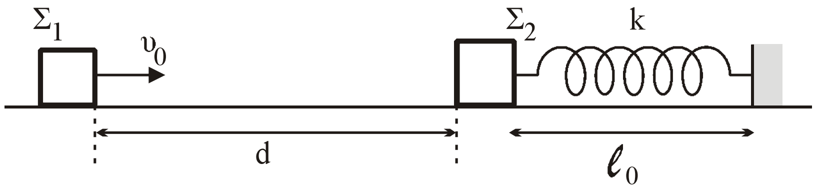
Μονάδες 2

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Σώμα Σ_1 με μάζα m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο ολισθαίνοντας προς άλλο σώμα Σ_2 με μάζα $m_2 = 2m_1$, το οποίο αρχικά είναι ακίνητο. Έστω υ_0 η ταχύτητα που έχει το σώμα Σ_1 τη στιγμή $t_0 = 0$ και ενώ βρίσκεται σε απόσταση $d = 1$ m από το σώμα Σ_2. Αρχικά, θεωρούμε ότι το σώμα Σ_2 είναι ακίνητο πάνω στο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου με αμελητέα μάζα και σταθερά ελατηρίου k, και το οποίο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0. Το δεύτερο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Αμέσως μετά τη κρούση, που είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 αποκτά ταχύτητα με μέτρο $\upsilon_1' = \sqrt{10}$ m/s και φορά αντίθετη της αρχικής ταχύτητας.

Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu = 0{,}5$ και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10$ m/s^2.

Γ1. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα υ_0 του σώματος Σ_1.

Μονάδες 6

Γ2. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 κατά την κρούση.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος Σ_1 από την αρχική χρονική στιγμή t_0 μέχρι να ακινητοποιηθεί τελικά.

Δίνεται: $\sqrt{10} \simeq 3{,}2$

Μονάδες 6

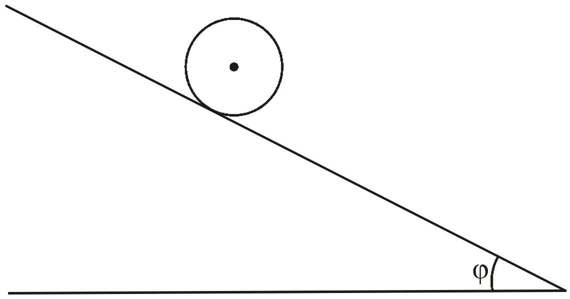
Γ4. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, αν δίνεται ότι $m_2 = 1$kg και $k = 105$ N/m.

Μονάδες 7

Θεωρήστε ότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και ότι τα δύο σώματα συγκρούονται μόνο μία φορά.

ΘΕΜΑ Δ

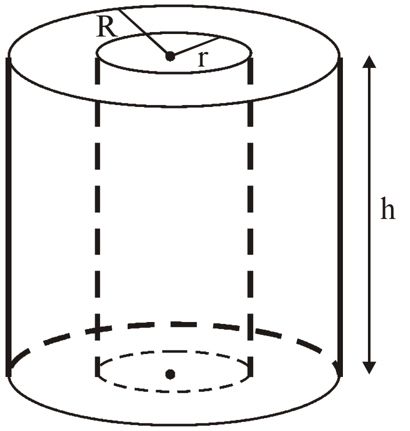
Δίνεται συμπαγής, ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R. Αφήνουμε τον κύλινδρο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Δ1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Ο άξονας του κυλίνδρου διατηρείται οριζόντιος.

Μονάδες 5

Δ2. Από το εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου, που έχει ύψος h, αφαιρούμε πλήρως ένα ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας r, όπου $r < R$, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

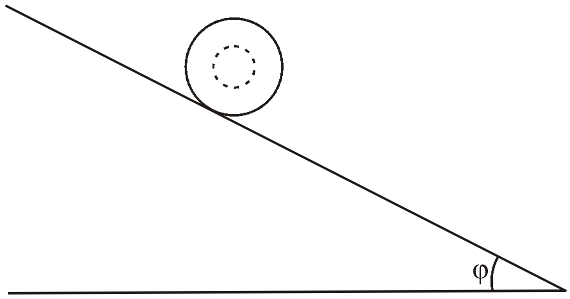


Να αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, που προκύπτει μετά την αφαίρεση του εσωτερικού κυλινδρικού τμήματος, είναι

$$I_{\text{κοίλ}} = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$$

Μονάδες 7

Στη συνέχεια λιπαίνουμε το κυλινδρικό τμήμα που αφαιρέσαμε και το επανατοποθετούμε στη θέση του, ούτως ώστε να εφαρμόζει απόλυτα με τον κοίλο κύλινδρο χωρίς τριβές. Το νέο σύστημα που προκύπτει αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Δ3. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος.

Μονάδες 7

Δ4. Όταν $r = \frac{R}{2}$, να υπολογίσετε, σε κάθε χρονική στιγμή της κύλισης στο κεκλιμένο επίπεδο, το λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του συστήματος.

Μονάδες 6

Ο άξονας του συστήματος διατηρείται πάντα οριζόντιος.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας I συμπαγούς και ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R, ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται: $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Ο όγκος V ενός συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους h: $V = \pi R^2 h$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. γ   Α2. γ   Α3. δ   Α4. γ

Α5. α) Σ   β) Λ   γ) Σ   δ) Λ   ε) Σ

(Διευκρίνιση: κατά την μαθηματική ορολογία υπάρχει αντίφαση στην εκφώνηση καθώς τα παράλληλα διανύσματα είναι και συγγραμμικά)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αρχικά η ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι:

$$E_{T\,1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\cdot C\cdot V_c^2 \Rightarrow E_{T\,1} = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10^{-6}\cdot 400 = 4\cdot 10^{-3} \ \ Joule$$

Τελικά, η ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι:

$$E_{T\,2} = \frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2 \Rightarrow E_{T\,2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot 10^{-3}\cdot 6^2 = 2\cdot 10^{-3} \ \ Joule$$

Άρα η μείωση της συνολικής ενέργειας της ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι:

$$\Delta\mathrm{E_T} = E_{\mathrm{T}\,1} - E_{\mathrm{T}\,2} = 4\cdot 10^{-3} - 2\cdot 10^{-3} = 2\cdot 10^{-3} \ \ Joule$$

Οπότε η σωστή απάντηση είναι η ii).

Β2. Ισχύει $\upsilon = \lambda_1\cdot f_1$ (1)

Αν $f_2 = 3f_1$ τότε: $\upsilon = \lambda_2\cdot f_2 \Rightarrow \upsilon = 3\lambda_2\cdot f_1$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $\lambda_1\cdot f_1 = 3\lambda_2\cdot f_1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{3}$ (3)

Έστω ένα σημείο Σ (απόσβεσης) μεταξύ των Κ, Λ το οποίο απέχει αποστάσεις r_1, r_2 από τα Κ, Λ αντίστοιχα.

Ισχύει: Για $r_1 > r_2$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 - r_2 = (2N+1)\cdot\dfrac{\lambda_2}{2} \\ \text{όμως} \ \ r_1 + r_2 = d \Rightarrow r_2 = d - r_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$r_1 - d + r = (2N+1)\frac{\lambda_2}{2} \overset{(3)}{\Longrightarrow} 2r_1 - d = (2N+1)\frac{\lambda_1}{6} \Rightarrow 2r_1 = (2N+1)\frac{\lambda_1}{6} + d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2r_1 = (2N+1)\frac{\lambda_1}{6} + 2\lambda_1 \Rightarrow r_1 = (2N+1)\frac{\lambda_1}{12} + \lambda_1 \quad (4)$$

Πρέπει: $0 < r_1 < d \overset{(4)}{\Longrightarrow} 0 < (2N+1)\frac{\lambda_1}{12} + \lambda_1 < 2\lambda_1 \Rightarrow 0 < (2N+1)\frac{\lambda_1}{12} + \lambda_1 < 2\lambda_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0<\frac{(2N+1)}{12}+1<2 \Rightarrow 0<(2N+1)+12<24 \Rightarrow 0<2N+13<24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -13<2N<11 \Rightarrow -6,5<N<5,5$$

Άρα, οι ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει το N
είναι: $N=-6,-5,-4,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

Άρα 12 υπερβολές απόσβεσης. Επομένως σωστή απάντηση είναι η (iii)

Β3. Από την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής έχουμε:

$$L_{αρχ\cdot(συστ.)}=L_{τελ\cdot(συστ.)} \Rightarrow I_1\cdot\omega_1=(I_1+I_2)\cdot\omega_{τελ.} \Rightarrow I_1\cdot\omega_1=(I_1+\frac{I_1}{4})\cdot\omega_{τελ.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1\cdot\omega_1=\frac{5\cdot I_1}{4}\cdot\omega_{τελ.} \Rightarrow \omega_{τελ.}=\frac{4}{5}\cdot\omega_1 \quad (1)$$

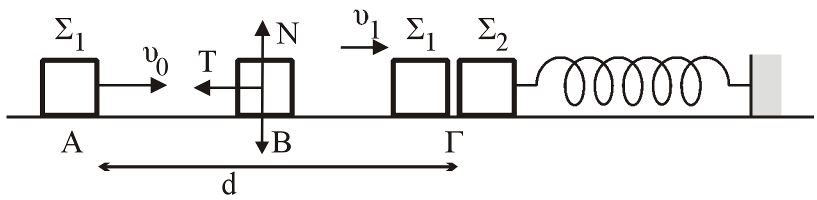
Άρα η τελική στροφορμή του δίσκου $Δ_1$ έχει μέτρο:

$$L_{1(τελ.)}=I_1\cdot\omega_{τελ.} \overset{(1)}{\Longrightarrow} L_{1(τελ.)}=I_1\cdot\frac{4}{5}\omega_1=\frac{4}{5}L_1 \quad (2)$$

Οπότε: $\left|\overrightarrow{\Delta L}\right|=\left|L_{1(τελ.)}-L_{1(arx.)}\right|=\left|I_1\frac{4}{5}\omega_1-I_1\cdot\omega_1\right|=\frac{I_1\cdot\omega_1}{5}=\frac{L_1}{5}$

Οπότε σωστή είναι η απάντηση ii).

ΘΕΜΑ Γ

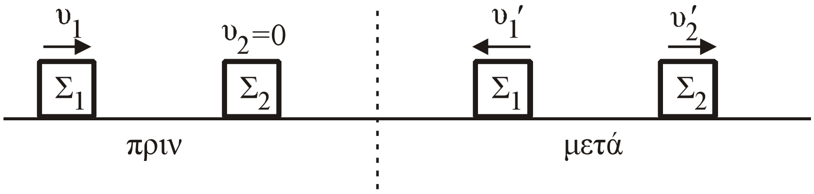


Γ1. Στο σώμα $Σ_1$ απο το ΘΜΚΕ έχουμε:

$$K_Γ-K_A=W_T+W_B+W_N \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2=-Td \quad (1)$$

Όμως $\left.\begin{aligned}\Sigma F_y=0 \Rightarrow B=N \Rightarrow N=m_1 g\\ T=\mu\cdot N \Rightarrow T=\mu\cdot m_1 g\end{aligned}\right\}(2)$

$$(1)\overset{(2)}{\Longrightarrow}\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2=-\mu\cdot m_1\cdot g\cdot d \Rightarrow \upsilon_1^2-\upsilon_0^2=-2\mu\cdot g\cdot d \quad (3)$$



Από την ελαστική κρούση στο σημείο Γ έχουμε την ταχύτητα που αποκτά το Σ_1 μετά την κρούση:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1}\cdot \upsilon_1 \Rightarrow -\sqrt{10} = \frac{-m_1}{3m_1}\cdot \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 3\cdot\sqrt{10}\ m/s\,.$$

Από την (3) $\Rightarrow (3\sqrt{10})^2 - \upsilon_0^2 = -2\cdot 0,5\cdot 10\cdot 1 \Rightarrow 90 - \upsilon_0^2 = -10 \Rightarrow \upsilon_0^2 = 100 \Rightarrow \upsilon_o = 10\,\text{m/s}$

Από την ελαστική κρούση έχουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2m_1}{3m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{3\sqrt{10}\cdot 2}{3} = 2\sqrt{10}\quad \text{m/s}$$

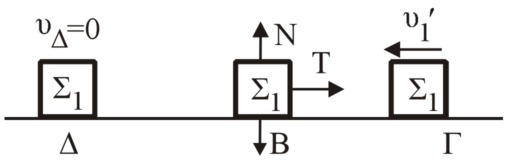
Γ2. Στην ελαστική κρούση ισχύει η ΑΔΚΕ.

$$K_{\text{ολ}_{\text{πριν}}} = K_{\text{ολ}_{\text{μετά}}} \Rightarrow K_1 = K_1' + K_2'$$

το ποσοστό $\Pi = \dfrac{K_2'}{K_1}\cdot 100\% = \dfrac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}\cdot 100\% = \dfrac{2m_1\upsilon_2'^2}{m_1\upsilon_1^2}\cdot 100\% =$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 10}{90}\cdot 100\% = \frac{8}{9}100\% = 88,89\% \text{ ή } K_2' = \frac{8}{9}K_1$$

Γ3.



Κίνηση του Σ_1

μετά την κρούση

(Σχήμα 1)

Το σώμα Σ_1 για την κίνηση από το Α στο Γ (σχήμα εκφώνησης) έχει επιτάχυνση

$$\Sigma F_x = m_1 a_1 \Rightarrow -T = m_1 a_1 \overset{(2)}{\Longrightarrow} -m_1 \mu g = m_1 a_1 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = -\mu g = -0,5\cdot 10 = -5\ \text{m/s}^2$$

άρα $\upsilon_1 = \upsilon_0 - \alpha t_1 \Rightarrow 3\cdot\sqrt{10} = 10 - 5t_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{10-3\sqrt{10}}{5} = \frac{10-9,6}{5} = 0,08 \text{ s}$$

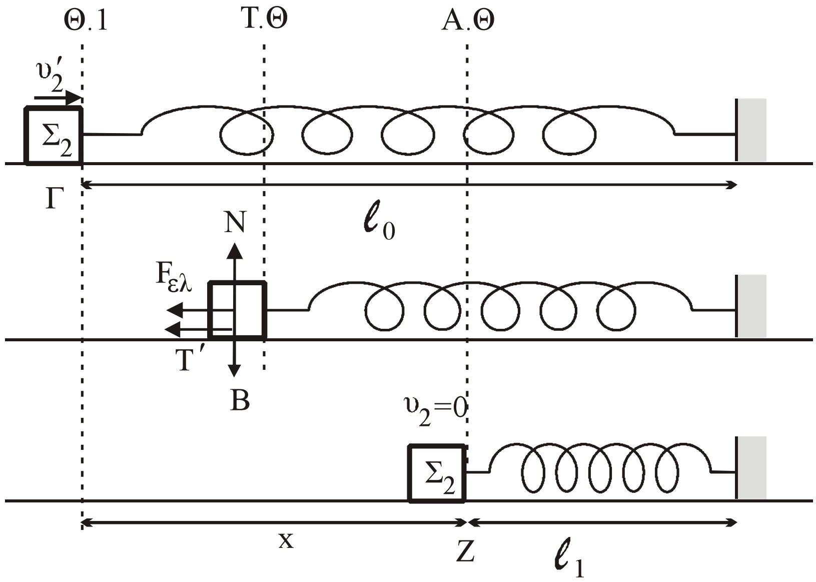
Για την κίνηση από Γ στο Δ (Σχήμα 1)

$$\Sigma F_x = m_1 a_2 \Rightarrow -\text{T} = m_1 a_2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} a_2 = -5 \text{ m/s}^2$$

$$\upsilon_\Delta = \upsilon_1' - \alpha t_2 \Rightarrow 0 = \sqrt{10} - 5t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3,2}{5} = 0,64 \text{ s}$$

$t_{ολ} = t_1 + t_2 = 0,72$ s

Γ4.



Για το Σ_2 μετά την κρούση έχει ταχύτητα υ_2' και βρίσκεται σε Θ.Ι. Θα έχει μέγιστη συσπείρωση το ελατήριο αν το Σ_2 πάει στην Α.Θ. που η ταχύτητα του είναι $\upsilon_2 = 0$.

Στην τυχαία θέση στο Σ_2 ασκούνται οι δυνάμεις Βάρος - καθ. αντιδ. που το έργο τους είναι μηδέν και οι δυνάμεις τριβή και $F_{ελατ.}$ που καταναλωνούν ενέργεια.
Παίρνοντας ΘΚΜΕ από Θ.Ι. μέχρι Α.Θ. έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{T'} + W_{Fελ}$$

$$\left.\begin{aligned} &0 - \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = -T' \cdot x \ - \frac{1}{2} K (\Delta l)^2 \\ &\Delta l = l_0 - l_1 = x \\ &T' = \mu \text{N} = \mu m_2 g = 0,5 \cdot 1 \cdot 10 = 5N \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\upsilon_2'^2 = -5x - \frac{1}{2}105x^2 \text{ με αντικατάσταση}$$

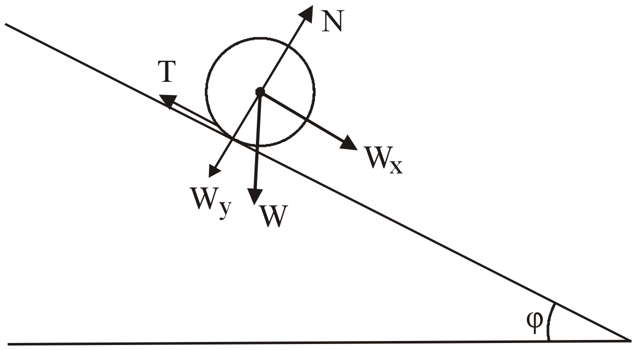
$$-40 + 10x + 105x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm130}{210}\begin{array}{l}\nearrow x_1=\dfrac{120}{210}=0,57\,\text{m}\ \ (\text{δεκτό})\\ \searrow x_2=\dfrac{-140}{210}\qquad\qquad(\text{απορρ.})\end{array}$$

Άρα μέγιστη συσπείρωση $\Delta l = x = 0,57$ m

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Ο κύλινδρος εκτελεί και μεταφορική και περιστροφική κίνηση.
Ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις:

$$\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{\text{cm}} \Rightarrow M\cdot g\cdot\etaμ\varphi - T = M\cdot\alpha_{\text{cm}} \Rightarrow T = M\cdot g\cdot\etaμ\varphi - M\cdot\alpha_{\text{cm}} \quad (1)$$

και $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T\cdot R = \frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}M\cdot\alpha_{\text{cm}} \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{1}{2}M\cdot\alpha_{\text{cm}} = M\cdot g\cdot\etaμ\varphi - M\cdot\alpha_{\text{cm}} \Rightarrow \frac{3}{2}\alpha_{\text{cm}} = g\cdot\etaμ\varphi \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{2g\cdot\etaμ\varphi}{3}.$$

Δ2. $I_{\text{κοίλ.}} = I_{\text{Μεγ.}} - I_{\text{μικρ.}} \Rightarrow I_{\text{κοίλ.}} = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}m_x r^2 \quad (1)$

Οι δύο κύλινδροι έχουν την ίδια πυκνότητα και άρα ισχύει:

$$\rho_{I_{\text{Μεγ.}}} = \rho_{I_{\text{μικρ.}}} \Rightarrow \frac{M}{V_{\text{Μεγ.}}} = \frac{m}{V_{\text{Μικρ.}}} \Rightarrow \frac{M}{\pi\cdot R^2\cdot h} = \frac{m}{\pi\cdot r^2\cdot h} \Rightarrow m = \frac{M\cdot r^2}{R^2} \quad (2)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$I_{\text{κοίλ.}} = \frac{1}{2}M\cdot R^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{M\cdot r^2}{R^2}\cdot r^2 \Rightarrow I_{\text{κοίλ.}} = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{M\cdot r^4}{R^2} \Rightarrow I_{\text{κοίλ.}} = \frac{1}{2}MR^2\cdot\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right).$$

Δ3.

$$\Sigma F = M\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow M\cdot g\cdot \eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau} = M\cdot\alpha_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau.}\cdot R = \frac{1}{2}MR^2\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T_{\sigma\tau.} = \frac{1}{2}M\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)\cdot\alpha_{cm} \quad (2)$$

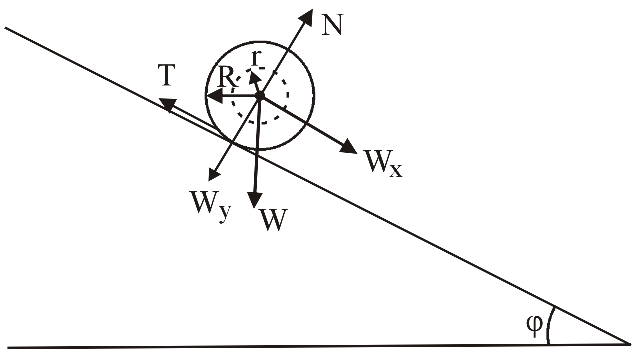
Άρα

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} Mg\eta\mu\varphi - \frac{1}{2}M\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)\cdot\alpha_{cm} = \mathrm{M}\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\cdot\eta\mu\varphi = \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)+1\right]\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\cdot\eta\mu\varphi = \left[\frac{1}{2}-\frac{r^4}{2R^4}+1\right]\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{g\cdot\eta\mu\varphi}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{r^4}{R^4}} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2g\cdot\eta\mu\varphi}{3-\frac{r^4}{R^4}}.$$



Δ4.

$$\frac{k_{\mu\varepsilon\tau}}{k_{\pi\varepsilon\rho}} = \frac{\frac{1}{2}M\cdot\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2} = \frac{M\cdot\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}M\cdot R^2\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)\omega^2} =$$

$$= \frac{2\cdot\upsilon_{cm}^2}{R^2\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)\omega^2} = \frac{2}{1-\frac{r^4}{R^4}} = \frac{2}{1-\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^4}{R^4}} =$$

$$= \frac{2}{1-\frac{\frac{R^4}{16}}{R^4}} = \frac{2}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{\frac{15}{16}} = \frac{32}{15}.$$

SCHOOLDOCTOR

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

A4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z-\overline{z}=2\text{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ ∈Δ, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Θεώρημα, σχολικό βιβλίο σελίδα 251.

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 273.

Α3. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 150.

Α4. **α)** Λ, σχολικό βιβλίο σελίδα 91

β) Σ, σελίδα 178

γ) Σ, σελίδα 260

δ) Σ, σελίδα 332

ε) Λ, Προκύπτει από το σχόλιο στη σελίδα 254

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0,\ z\in\mathbb{C}$$

Β1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u+w|=|4z_1-z_2-i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

Β1. Έστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$,

οπότε

$$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2xi-4-2i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\ \text{και}\\ 2xi=2i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ \text{και}\\ y=\pm1\end{cases}$$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις $z_1=1+i,\ \ z_2=1-i$

Β2. Είναι $w=3\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left(\dfrac{2i}{2}\right)^{39}=3i^{39}=3i^3=-3i$

Β3. Είναι

$$|u+w|=|4z_1-z_2-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|4+4i-1+i-i|$$
$$\Leftrightarrow |u-3i|=|4i+3|$$
$$\Leftrightarrow |u-3i|=5$$

οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1), x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x)=e^x(h(x)+\ln 2), x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\phi(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Γ1. Η $h(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

$$\text{με } h'(x)=\frac{1}{e^x+1} \text{ και } h''(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

οπότε στρέφει τα κοίλα κάτω (είναι κοίλη).

Γ2. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln\left(e^{h(2h'(x))}\right)<1-\ln(e+1)$$
$$\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1)$$

Αφού η $h(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (έχει παράγωγο θετική), θα είναι

$$2h'(x)<1 \Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x)<h'(0)$$

Αφού η $h'(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα, είναι $x>0$.

Γ3. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

Αν $u(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1$$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{u\to1}(\ln u)=0$.

Η ευθεία y = 0 είναι η οριζόντια ασύμπτωτης της C_h στο $+\infty$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)=0$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=0+1=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)=0,\ \ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=1=\lambda$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)=0=\beta,$$

οπότε η $y=x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

Γ4. Είναι

$$\phi(x)=e^x\left(h(x)+\ln2\right)=e^x\left(x+\ln\frac{2}{e^x+1}\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι

$$\phi(x)=0\Leftrightarrow h(x)=-\ln2=h(0)\Leftrightarrow x=0$$

και

$$\phi(x)>0\Leftrightarrow h(x)>-\ln2=h(0)\Leftrightarrow x>0,$$

αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E=\int_0^1 \phi(x)dx=\int_0^1 e^x\left[x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right]dx=$$

$$=\int_0^1 e^x \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=\int_0^1 \left(e^x\right)' \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=$$

$$=\left[e^x \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1 e^x\frac{e^x+1}{2e^x}\frac{2e^x\left(e^x+1\right)-2e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx=$$

$$=e\cdot\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-e\cdot\ln 1-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=$$

$$=e\cdot\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+e-\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=$$

$$=e\cdot\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+e-\ln(e+1)+\ln 2=(e+1)\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+e \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x=0$

(μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq x_0$ με $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y(t), αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

(μονάδες4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2(x-2)^2,\ x\in(0,+\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Δ1. Είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1=f(0)$$

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\dfrac{h(x)}{x^2}$ όπου $h(x)=xe^x-e^x+1$.

Το πρόσημο της h καθορίζει το πρόσημο της f'.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ με $h'(x)=xe^x$.

Επίσης:

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

$h'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Συνεπώς για $x>0$ έχουμε $h(x)>h(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$.

Για $x<0$ έχουμε $h(x)>h(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$.

Τελικά, αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ2.

α) Θα βρούμε αρχικά την παράγωγο της f στο 0 με τη χρήση του ορισμού.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Τώρα, η $x=0$ είναι προφανής λύση της δοσμένης εξίσωσης αφού για $x=0$ το πρώτο μέλος είναι ίσο με

$$\int_1^{2\frac{1}{2}} f(u)du=\int_1^1 f(u)du=0.$$

Για $x>0$ είναι $e^x>1 \Rightarrow \dfrac{e^x-1}{x}>0 \Rightarrow f(x)>0$ ενώ για $x<0$ είναι $e^x<1 \overset{x<0}{\Rightarrow} \dfrac{e^x-1}{x}>0 \Rightarrow f(x)>0$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1>0$.

Αφού η f είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς για $x>0 \Rightarrow f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow 2f'(x)>1$ και αφού $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, άρα

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$$

οπότε δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x>0$.
Όμοια για $x<0 \Rightarrow f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow 2f'(x)<1$ και $f(x)>0$ για κάθε $x<0$,
άρα

$$\int_{2f'(x)}^{1} f(u)du>0 \Leftrightarrow \int_{1}^{2f'(x)} f(u)du<0$$

άρα δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x<0$.

Συνεπώς η μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η $x=0$.

β) **Αν** t_0 είναι η χρονική στιγμή στην οποία ισχύει $x'(t_0)=2y'(t_0)$ τότε έχουμε διαδοχικά

$$x'(t_0)=2y'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0)=2f'(x(t_0))x'(t_0) \overset{x'(t_0)\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x(t_0))=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow f'(x(t_0))=f'(0) \overset{f'\uparrow \text{ άρα } 1-1}{\Leftrightarrow} x(t_0)=0$$

Άρα $y(t_0)=f(x(t_0))=f(0)=1$, συνεπώς το ζητούμενο σημείο είναι το $A(0,1)$.

Δ3. $g(x)=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγισίμων με

$$\begin{aligned} g'(x)&=2\left(e^x-e\right)(x-2)(xe^x-e^x-e)\\ &=2\left(e^x-e\right)(x-2)r(x) \end{aligned},$$

όπου $r(x)=xe^x-e^x-e$.
Η συνάρτηση $r(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $r'(x)=xe^x$.
Είναι $r'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ και $r'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$ άρα η r είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
Μάλιστα επειδή $r(1)=-e<0$, $r(2)=e^2-e>0$ και η $r(x)$ είναι συνεχής στο [1, 2] άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$ ώστε $r(x_0)=0$ και επειδή η r είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.
Τελικά

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x=1,\ x=x_0,\ x=2\right).$$

Συνεπώς φτιάχνοντας ένα πίνακα προσήμου για την g' φαίνεται εύκολα ότι

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$x-2$		-		-		-	0	+	
e^x-e		-	0	+		+		+	
$e^x x-e^x-e$		-		-	0	+		+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		

$$g'(x)<0 \text{ όταν } x\in(0,1)\cup(x_0,2)$$

ενώ

$$g'(x)>0 \text{ όταν } x\in(1,x_0)\cup(2,+\infty).$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1]$ και $[x_0,2]$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[1,x_0]$ και $[2,+\infty)$.
Άρα τελικά όπως φαίνεται και από τον πίνακα μονοτονίας, η g έχει 2 θέσεις τοπικών ελαχίστων στα $x=1$ και $x=2$ και μία θέση τοπικού μεγίστου στο $x=x_0$.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό $\boldsymbol{\eta}$ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0)=\boldsymbol{\eta}$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι $fog = gof$.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x$.

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-4|=2|z-1|.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$.

Μονάδες 7

Β2. Έστω $w=\dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4\leq w\leq 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν $w=-4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3, με $z_3=2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2x f(4x)$$

για κάθε $x>0$.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt, & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $f(0)=0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. **α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ell n\left|f(x)\right|\right].$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^{x} f^2(t)dt}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΠΤΑ (7) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 194

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 188

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα, 259

Α4. α) Λάθος, σχολικό βιβλίο, σελίδα 144

β) Σωστό, σχολικό βιβλίο, σελίδα 89

γ) Λάθος, σχολικό βιβλίο, σελίδα 225

δ) Σωστό, σχολικό βιβλίο, σελίδα 332

ε) Σωστό, σχολικό βιβλίο, σελίδα 178

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Έχουμε,

$$|z-4| = 2\cdot|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = \left(2\cdot|z-1|\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4) = 4(z-1)(\overline{z}-1)$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 16 = 4z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 4$$

$$\Leftrightarrow 3z\overline{z} = 12$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} = 4$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow |z| = 2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$

Β2. α) Είναι:

$$|z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 2^2 \Leftrightarrow z\overline{z} = 4 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{4}{z}$$

Οι z_1, z_2 μιγαδικοί του Β1 ερωτήματος άρα ισχύει

$$\overline{z}_1 = \frac{4}{z_1} \text{ και } \overline{z}_2 = \frac{4}{z_2}$$

οπότε,

$$\overline{w} = \frac{2\overline{z}_1}{\overline{z}_2} + \frac{2\overline{z}_2}{\overline{z}_1} = \frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w$$

Άρα, ο w είναι πραγματικός αριθμός.

β) Έχουμε,

$$|z_1| = |z_2| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1$$

οπότε,

$$|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le 2\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + 2\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$$

άρα

$$|w|\le 2\cdot 1+2\cdot 1\Leftrightarrow |w|\le 4\overset{w\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}-4\le w\le 4$$

Β3. Αφού
$$w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\Leftrightarrow -4=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0\Leftrightarrow z_2=-z_1$$
Άρα έχουμε τις εικόνες $A(z_1),B(z_2),\Gamma(2iz_1)$ στο μιγαδικό επίπεδο τέτοιες ώστε,

$$(A\Gamma)=|2iz_1-z_1|=|z_1||2i-1|=2\sqrt{1+4}=2\sqrt{5}$$
και
$$(B\Gamma)=|2iz_1+z_1|=|z_1||2i+1|=2\sqrt{1+4}=2\sqrt{5}=(A\Gamma)$$

άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Β΄ τρόπος

Β2. Για ευκολία θέτουμε: $\frac{z_1}{z_2}=\gamma+\delta i,\ \gamma,\delta\in\mathbb{R}$

Όμως,
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=|\gamma+\delta i|\Rightarrow \gamma^2+\delta^2=1$$
δηλ. οι εικόνες του μιγαδικού $\gamma+\delta i,\ \gamma,\delta\in\mathbb{R}$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

α) Έχουμε,
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{\gamma+\delta i}=\frac{\gamma-\delta i}{\gamma^2+\delta^2}=\gamma-\delta i,$$
άρα,
$$w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=2(\gamma+\delta i)+2(\gamma-\delta i)=4\gamma\in\mathbb{R}$$
β) Έχουμε,
$$-4\le w\le 4\Leftrightarrow -4\le 4\gamma\le 4\Leftrightarrow -1\le\gamma\le 1\Leftrightarrow |\gamma|\le 1$$

που ισχύει ως τετμημένη του μοναδιαίου κύκλου.

Β3. Έχουμε,
$$w=-4\Rightarrow 4\gamma=-1\Rightarrow \gamma=-1\Rightarrow \frac{z_1}{z_2}=-1\Rightarrow z_1=-z_2$$
Άρα έχουμε τις εικόνες $A(z_1),B(z_2),\Gamma(2iz_1)$ στο μιγαδικό επίπεδο τέτοιες ώστε
$$(A\Gamma)=|2iz_1-z_1|=|z_1||2i-1|=2\sqrt{1+4}=2\sqrt{5}$$
και
$$(B\Gamma)=|2iz_1+z_1|=|z_1||2i+1|=2\sqrt{1+4}=2\sqrt{5}=(A\Gamma)$$

άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων, e^x και x^2+1, παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με :

$$f'(x)=\frac{\left(e^x\right)'(x^2+1)-e^x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=1$,άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f\left(\mathbb{R}\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(0,+\infty\right)$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}e^x\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\cdot 0=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Γ2. Είναι :

$$f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow e^{3-x}(x^2+1)=2\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}\frac{e^3}{e^x}=\frac{2}{x^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}>0$$

Όμως $\frac{e^3}{2}\in f\left(\mathbb{R}\right)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα ,άρα ¨1 – 1 ¨ από

Θ.Ε.Τ. υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=\frac{e^3}{2}$

Β΄ τρόπος

Έχουμε,

$$f\left(\frac{e^3}{f(x)}\right)=f\left(2\right)\overset{f:1-1}{\Rightarrow}\frac{e^3}{f(x)}=2\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{e^3}{2}$$

όμως

$$\frac{e^3}{2}\in f\left(A\right)$$

άρα υπάρχει μοναδικό x_0 λόγω μονοτονίας της f τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)=\frac{e^3}{2}$

Γ3. Θεωρούμε συνάρτηση $G(x)=\int_0^x f(t)dt$

Αφού η f συνεχής στο R είναι παραγωγίσιμη στο R με $G'(X)=f(x)>0$, για κάθε $x\in\Re$. Άρα η G γνησίως αύξουσα στο R. Η G ικανοποιεί τις προϋποθέσεις Θ.Μ.Τ στο $[2x, 4x]\subseteq(0,+\infty)$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2x,4x)$ ώστε :

$$G'(\xi)=\frac{G(4x)-G(2x)}{4x-2x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{1}{2x}\left(\int_0^{4x}f(t)dt-\int_0^{2x}f(t)dt\right)\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{1}{2x}\int_{2x}^{4x}f(t)dt$$

Όμως

$$0<x<2x<\xi<4x\xrightarrow{G'\uparrow}G'(\xi)<G'(4x)\ \Rightarrow\frac{1}{2x}\int_{2x}^{4x}f(t)dt<f(4x)\xrightarrow{x>0}\int_{2x}^{4x}f(t)dt<2xf(4x)$$

Β΄ τρόπος

$$0<2x<t<4x\xrightarrow{f\uparrow}f(t)<f(4x)\Rightarrow f(4x)-f(t)>0\Rightarrow\int_{2x}^{4x}[f(4x)-f(t)]dt>0$$

$$\Rightarrow\int_{2x}^{4x}f(4x)dt>\int_{2x}^{4x}f(t)dt\Rightarrow f(4x)\int_{2x}^{4x}dt>\int_{2x}^{4x}f(t)dt\Rightarrow 2xf(4x)>\int_{2x}^{4x}f(t)dt$$

Γ΄ τρόπος

Έστω F αρχική συνάρτηση της f, οπότε $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x>0$

Οπότε,

$$\int_{2x}^{4x}f(t)\,dt<2xf(4x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F(4x)-F(2x)<2xf(4x)$$
$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{F(4x)-F(2x)}{4x-2x}<f(4x)$$
$$\Leftrightarrow F'(\xi)<f(4x)$$
$$\Leftrightarrow \xi<4x$$

που ισχύει, αφού από Θ.Μ.Τ για την F στο [2x, 4x] υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2x,4x)$ τέτοιο ώστε,

$$F'(\xi)=\frac{F(4x)-F(2x)}{4x-2x}$$

Γ4. Εξετάζουμε την συνέχεια της συνάρτησης g στο $x=0$.
Είναι :

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1}=4\cdot1-2\cdot1=2=g(0).$$

άρα g συνεχής στο $x=0$ και επειδή είναι και συνεχής , για κάθε $x>0$, ως πηλίκων συνεχών , θα είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Επίσης g παραγωγίσιμη με :

$$g'(x)=\frac{\left(\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)'x-(x)'\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2}==\frac{\big(4f(4x)-2f(2x)\big)x-\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2}=$$

$$=\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2}=\frac{2xf(4x)+2xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2}=$$

$$=\frac{\big(2xf(4x)-2xf(2x)\big)+\left(2xf(4x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)}{x^2}.$$

Όμως για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$2x>0$$

$$2x<4x\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(2x)<f(4x)\Rightarrow f(4x)-f(2x)>0$$

Από **Γ3** :

$$2xf(4x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt>0$$

$$x^2>0$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, όμως η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα η g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Είναι

$$f'(x)\left(e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right)=2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c \ (1)$$

Για

$$x=0 \ (1) \Rightarrow e^{f(0)}-e^{-f(0)}=c \Leftrightarrow c=0$$

$$(1) \Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \overset{\cdot e^{f(x)}}{\Leftrightarrow} e^{2f(x)}-1=2xe^{f(x)} \Leftrightarrow$$
$$e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}=1 \Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)}-x\right|=\sqrt{x^2+1} \ (2)$$

Έστω $g(x)=e^{f(x)}-x$ με $D_g=\mathbb{R}$ και g συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$g(x)=0 \Leftrightarrow e^{f(x)}-x=0 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)}-x\right|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=0 \text{ αδύνατο}$$

Άρα $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

Είναι

$$g(0)=e^{f(0)}-0=1>0 \text{ δηλαδή } g(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα

$$(2) \Leftrightarrow e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Δ2) α) Έχουμε,

$$f'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$$

$$f''(x)=-\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)},\ x\in\mathbb{R}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}>0 \Leftrightarrow x<0$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}<0 \Leftrightarrow x>0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f	∪ ↑		∩ ↓

β) Βρίσκουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο O(0,0). Είναι

$$f'(0)=\frac{1}{1}=1 \text{ άρα } (\varepsilon_O): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$$

Στο $[0,1]$ η f είναι κοίλη άρα ε_0 πάνω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής O(0,0) οπότε είναι $f(x)\le x$ για κάθε $x\in[0,1]$ με το «=» μόνο για $x=0$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega)=\int_0^1 (x-f(x))dx=\int_0^1\left(x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)dx$$

$$=\int_0^1 xdx-\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 (x)'\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\text{ τ.μ.}$$

Δ3) Αρχικά από Δ2α) είναι $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Για $x>0\overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$ άρα για x κοντά στο 0 με $x>0$ είναι $|f(x)|=f(x)$

Η $f^2(t)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, $0\in\mathbb{R}$ άρα η $\int_0^x f^2(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε η $h(x)=e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1$ επίσης παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ δηλαδή συνεχής στο $x_1=0$.

Έτσι λοιπόν

$$\lim_{x\to 0^+}h(x)=h(0)=e^{\int_0^0 f^2(t)dt}-1=0$$

Για το ζητούμενο όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln\left|f(x)\right|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln f(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\frac{1}{\ln f(x)}}\right]\overset{\frac{0}{0}}{\underset{d.L.H.}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}f^2(x)}{-\frac{1}{\ln^2 f(x)}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{-f'(x)}\cdot f^3(x)\ln^2 f(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}f(x)}{-f'(x)}\cdot\left(f(x)\ln f(x)\right)^2\right]=\ell$$

Είναι,

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}f(x)}{-f'(x)}\right]=\frac{f(0)}{-f'(0)}=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)\ln f(x)\right]\underset{u\to 0^+}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{u\to 0^+}\left[u\ln u\right]=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\right]\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{d.L.H.}{=}}\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}\right]=\lim_{u\to 0^+}\left[-u\right]=0$$

Άρα

$$L=0$$

β τρόπος

$$L=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln\left|f(x)\right|\right]\overset{f(x)>0 \text{ για } \chi>0}{=}\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln\left|f(x)\right|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\cdot x\ln f(x)\right]$$

Όμως,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)\right)\overset{f^2\ \text{συνεχής στο}\ 0}{=}e^0\cdot f^2(0)=0$$

και

$$\lim_{x\to0^+}\left[x\ln f(x)\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln f(x)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2f'(x)}{f(x)}$$

Όμως,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{f(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(x^2\right)'}{f'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{f'(x)}\overset{f'\ \text{συνεχής στο}\ 0}{=}\frac{0}{f'(0)}=\frac{0}{1}=0$$

Τελικά,

$$L=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)}{x}\cdot x\ln f(x)\right)=0\cdot0=0$$

Δ4. Θεωρώ τη συνάρτηση

$$g(x)=(x-2)\left[1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right]+(x-3)\left[8-3\int_0^{x}f^2(t)dt\right],\ \ x\in[2,3]$$

• Η g είναι συνεχής στο [2, 3] γιατί προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

• Ακόμα $g(2)=-\left[8-3\int_0^2 f^2(t)dt\right]=3\int_0^2 f^2(t)dt-8$

Αλλά όπως είδαμε στο Δ3 η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της, με εξίσωση y = x , άρα $f(x)\le x$, για κάθε $x\ge0$ καθώς και $f(x)>0$ για κάθε $x>0$
Άρα

$$f^2(t)\le t^2\ \text{, για κάθε}\ t\in[0,2]\ \ \text{ή}\ \ f^2(t)-t^2\le0\ \text{για κάθε}\ t\in[0,2]$$

Και αφού η $h(t)=f^2(t)-t^2$ είναι συνεχής και δεν είναι παντού μηδέν στο [0, 2] έχουμε

$$\int_0^2\left(f^2(t)-t^2\right)dt<0\Rightarrow\int_0^2 f^2(t)dt-\int_0^2 t^2dt<0\Rightarrow\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2dt$$

Αλλά

$$\int_0^2 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

Άρα

$$\int_0^2 f^2(t)dt < \frac{8}{3} \Rightarrow 3\int_0^2 f^2(t)dt < 8 \Rightarrow 3\int_0^2 f^2(t)dt - 8 < 0$$

δηλαδή g(2) < 0.
Όμοια,

$$g(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2)dt \text{ και όπως πριν } f(x) \le x \text{ , για κάθε } x \ge 0,$$

άρα $f(t^2) \le t^2$, για κάθε $t \in [0,1]$ κι αφού η $\varphi(t) = f(t^2) - t^2$ είναι συνεχής και δεν είναι παντού μηδέν στο [0, 1], θα έχουμε

$$\int_0^1 \left(f(t^2) - t^2\right)dt < 0 \Rightarrow \int_0^1 f(t^2)dt - \int_0^1 t^2 dt < 0 \Rightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \int_0^1 t^2 dt$$

Αλλά

$$\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Άρα

$$\int_0^1 f(t^2)dt < \frac{1}{3} \Rightarrow 3\int_0^1 f(t^2)dt < 1 \Rightarrow 1 - 3\int_0^1 f(t^2)dt > 0 \Rightarrow g(3) > 0$$

Επομένως

$$g(2) \cdot g(3) < 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση g(x) = 0 και ισοδύναμα η

$$\frac{1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x - 3} + \frac{8 - 3\int_0^{x} f^2(t)dt}{x - 2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3).

SCHOOLDOCTOR