ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ – ΑΥΤΟΤΕΛΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
& ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i=1,2,...,\kappa$;

(Μον. 3)

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i=1,2,...,\kappa$;

(Μον. 3)

γ. Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$.

(Μον. 4)

Μονάδες 10

Α2. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s\,,\bar{x}+s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

β. $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x$

γ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ. Η διακύμανση $\left(s^2\right)$ είναι μέτρο διασποράς.

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: $14,\ 12,\ 18,\ 4\alpha-1,\ 16$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Β1. Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του α.

Μονάδες 7

Β2. Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση $\left(s^2\right)$.

Μονάδες 7

Β3. Για $\alpha=4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Β4. Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ.

Μονάδες 5

Γ2. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 10

Γ3. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $\left(-1, f'(-1)\right)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 4) f'(x) - 2x}{x^2}$$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Σχολικό βιβλίο σελ. 65 **β)** Σχολικό βιβλίο σελ. 65 **γ)** Σχολικό βιβλίο σελ. 65

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 22

Α3. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού το πλήθος του δείγματος είναι περιττό η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση και επειδή $\delta = 15$, στη μέση δεν μπορεί να βρίσκεται κανένας από τους αριθμούς $12, 14, 16, 18$ και κατ' ανάγκη βρίσκεται ο αριθμός $4\alpha - 1$.
Έτσι λοιπόν έχουμε ότι

$$\delta = 4\alpha - 1 \Leftrightarrow 4\alpha - 1 = 15 \Leftrightarrow 4\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \alpha = 4$$

Β2. Για $\alpha = 4$ το δείγμα γίνεται:

$$12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18$$

Η διασπορά s^2 υπολογίζεται από τον τύπο $s^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(t_i - \bar{x}\right)^2$

Πρώτα λοιπόν θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή. Είναι,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} = \frac{12+14+15+16+18}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Άρα,

$$s^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{5}\left[(12-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(16-15)^2+(18-15)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow s^2=\frac{1}{5}\left[(-3)^2+(-1)^2+0+1^2+3^2\right]=\frac{1}{5}(20)=\frac{20}{5}=4$$

Β3. Αφού η διασπορά ισούται με 4 η τυπική απόκλιση ισούται με τη θετική τετραγωνική ρίζα της.

Δηλαδή $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος ισούται με $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{15}=0{,}1333$ ή $13{,}33\%$

Επειδή είναι $CV=13{,}33\%>10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β4. <u>Α΄ τρόπος</u>

Οι αρχικές παρατηρήσεις t_i μετά τις μετατροπές θα γίνουν $-2t_i+5$

Δηλαδή

$$-2\cdot 12+5,\ -2\cdot 14+5,\ -2\cdot 15+5,\ -2\cdot 16+5,\ -2\cdot 18+5$$

και άρα

$$-19,-23,-25,-27,-31$$

Άρα η νέα μέση τιμή είναι $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_i}{5}=\frac{-19-23-25-27-31}{5}=-\frac{125}{5}=-25$

και η νέα διασπορά

$$s^2=\frac{1}{5}\left[(-19-(-25))^2+(-23+25)^2+(-25-(-25))^2+(-27-(-25))^2+(-31-(-25))^2\right]\Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{1}{5}\left[6^2+2^2+0^2+(-2)^2+(-6)^2\right]=\frac{1}{5}(80)=16$$

Άρα $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{16}=4$

Επομένως $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{4}{|-25|}=\frac{4}{25}=0{,}16$ ή 16%

<u>Β΄ τρόπος</u>

Από την εφαρμογή του βιβλίου έχουμε πως η νέα μέση τιμή και η νέα τυπική απόκλιση για τις νέες τιμές y_i, θα ισούται με,

$$\bar{y}=-2\bar{x}+5=-2\cdot 15+5=-25$$

$$s_y=|-2|s=2\cdot 2=4$$

Επομένως $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{4}{|-25|}=\frac{4}{25}=0{,}16$ ή 16%

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa)' = (2x^3)' - (3\kappa x^2)' + (\kappa)' = 2(x^3)' - 3\kappa(x^2)' + 0$$
$$= 2\cdot 3x^2 - 3\kappa\cdot 2x = 6x^2 - 6\kappa x$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στο άξονα $x'x$, οπότε

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6\cdot 1^2 - 6\kappa\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6\kappa = 0 \Leftrightarrow 6\kappa = 6 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Γ2. Για $\kappa = 1$ είναι

$$f'(x) = 6x^2 - 6x \text{ και } f''(x) = 12x - 6$$

Ελέγχουμε πότε ο ρυθμός μεταβολής της f' γίνεται ελάχιστος, οπότε

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow 12x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 6 > 0 \Leftrightarrow 12x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 12x - 6 < 0 \Leftrightarrow 12x < 6 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	↘		↗

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα έχουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος όταν $x = \frac{1}{2}$.

Γ3. Έχουμε

$$f''(-1) = 12(-1) - 6 = -12 - 6 = -18 \text{ και}$$
$$f'(-1) = 6\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) = 6 + 6 = 12$$

Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράτασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$

Τότε

$$\lambda = f''(-1) = -18, \text{ άρα } y = -18x + \beta$$

Συνεπώς

$$(-1, f'(-1)) \in (\varepsilon) \Rightarrow f'(-1) = -18\cdot(-1) + \beta \Rightarrow 12 = 18 + \beta \Rightarrow \beta = 12 - 18 \Rightarrow \beta = -6$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$y = -18x - 6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+4}+2018\right)'=\left(\sqrt{x^2+4}\right)'+(2018)'=\dfrac{\left(x^2+4\right)'}{2\sqrt{x^2+4}}$

$$=\frac{\left(x^2\right)'+(4)'}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\ x\in\mathbb{R}$$

Δ2. Έχουμε ότι

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}>0\overset{\sqrt{x^2+4}>0,\ x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}x>0$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}<0\overset{\sqrt{x^2+4}>0,\ x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}x<0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[0,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=0$ με τιμή $f(0)=\sqrt{4}+2018=2+2018=2020$

Δ3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+4\right)f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+4\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x^2+4}-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}^2-2^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+4-4}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{0}{4}=0$$