ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν A και A' είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι για τις πιθανότητές τους ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α3. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε για τις πιθανότητές τους ισχύει $P(A) \le P(B)$.

β) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 9

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους.

Γ1. Να προσδιορίσετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος χρησιμοποιώντας ένα δενδροδιάγραμμα.

Μονάδες 4

Γ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι»

Β: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών»

Γ: «τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου».

Μονάδες 6

Γ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$$\Delta = A\cap B,\quad E = A\cup B,\quad Z = \Gamma - E.$$

(μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

Η: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β»

Θ: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α,Β».

(μονάδες 6)

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Δ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν ν υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i
[8 ,)		20
[,)	14	15
[,)		10
[,)		ν_4
ΣΥΝΟΛΟ		ν=………

Δ1. Να αποδείξετε ότι $c=4$.

Μονάδες 4

Δ2. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x}=14$, να αποδείξετε ότι $\nu_4=5$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ3. Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι $s=4$ και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Δ5. Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

& ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: *20 / 05 /2016*

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 150 - 151

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 14

Α4. i) Σ ii) Λ iii) Σ iv) Σ v) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1,\ x\in\mathbb{R}$

Παραγωγίζουμε τη f και έχουμε:

$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1\right)'=3\frac{x^2}{3}-2\frac{5}{2}x+6=x^2-5x+6$.Επομένως :

$f'(x)=x^2-5x+6$ με $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$ με τη βοήθεια της διακρίνουσας υπολογίζουμε τις ρίζες: $\Delta=25-24=1$ άρα $x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}\Leftrightarrow \boxed{x=3}$ ή $\boxed{x=2}$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,2]$, γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[2,3]$, γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3=[3,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπ.μέγιστο στο $x_1=2$ με τιμή $f(2)=\frac{11}{3}$
- Η f παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο $x_2=3$ με τιμή $f(3)=\frac{7}{2}$

B2. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής: $y=\lambda x+\beta$

Ξέρουμε ότι: $\lambda=f'(0)=6$ καθώς και ότι $f(0)=-1$

Άρα έχουμε $y=6x+\beta$, το σημείο Α επαληθεύει την ευθεία επομένως έχουμε:

$f(0)=6\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta=-1}$

Άρα $y=6x-1$

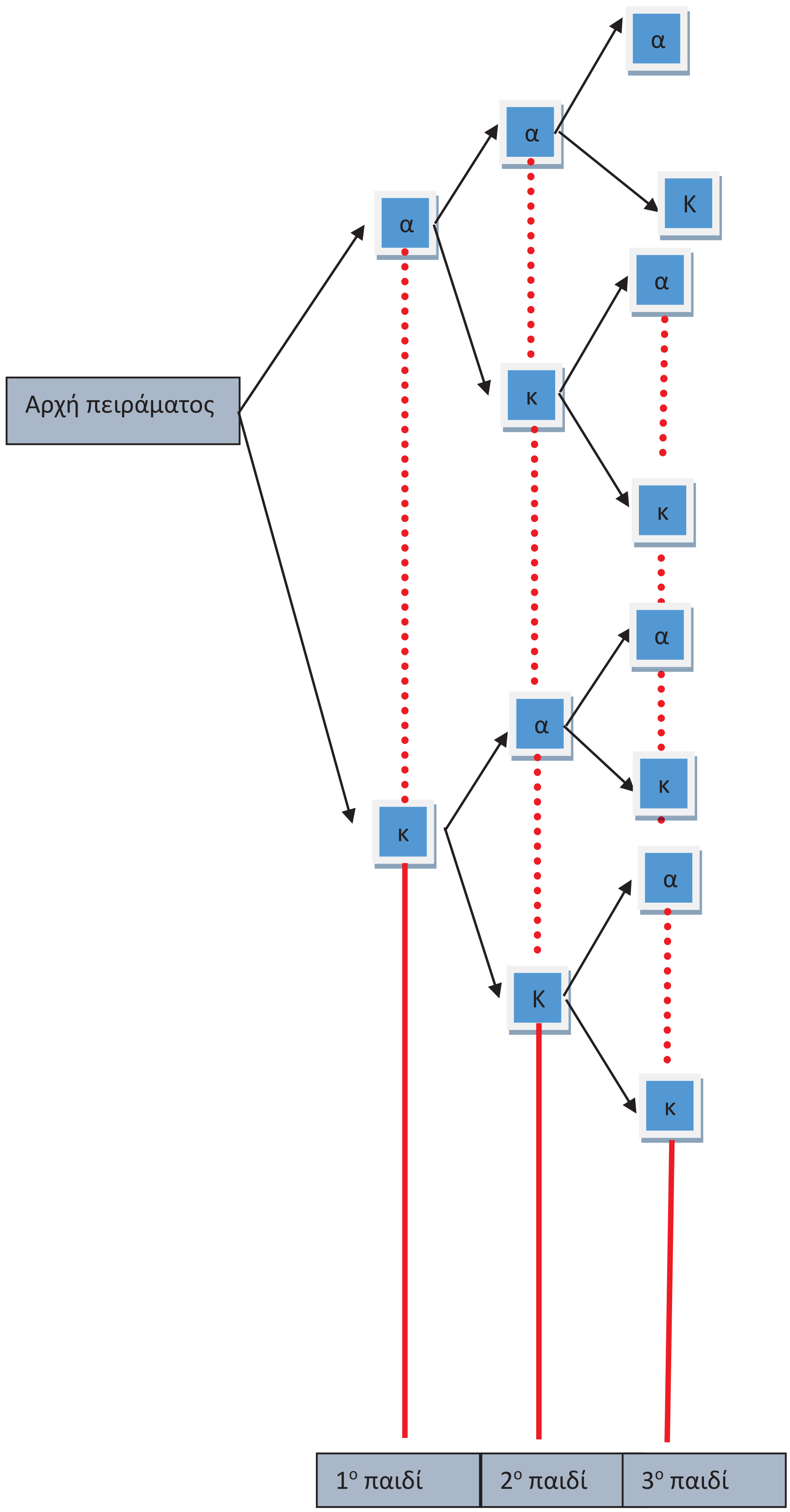
B3. Είναι

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-6)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-6)=-7$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ₁. Για να προσδιορίσουμε τον δειγματικό χώρο θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:



Γ₂. Ο δειγματικός χώρος:

Ω={ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ}

Το ενδεχόμενο Α είναι: Α={καα, κακ, κκα, κκκ}

Το ενδεχόμενο Β είναι: Β={ακκ, κακ, κκα, κκκ}

Το ενδεχόμενο Γ είναι: Γ={ααα, αακ, κκα, κκκ}

Γ₃.α) $\Delta = A \cap B = \{\kappa\alpha\kappa, \kappa\kappa\alpha, \kappa\kappa\kappa\}$

$E = A \cup B = \{\kappa\alpha\kappa, \kappa\kappa\alpha, \kappa\kappa\kappa, \kappa\alpha\alpha, \alpha\kappa\kappa\}$

$Z = \Gamma - E = \{\alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\kappa\}$

Τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα συνεπώς για τις αντίστοιχες πιθανότητες έχουμε:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$$

$$P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

β) $P(H) = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(E) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

$$P(\Theta) = P((A-B) \cup (B-A)) \overset{(A-B),(B-A)\,\alpha\sigma\upsilon\mu\beta\iota\beta\alpha\sigma\tau\alpha}{=} P(A-B) + P(B-A) =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(E) - P(\Delta) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $c > 0$ το πλάτος της κάθε κλάσης , τότε θα είναι για την δεύτερη κλάση

$\left[8 + c, 8 + 2c\right)$ και για κάθε κλάση $\left[\alpha, \beta\right)$ ισχύει για το κέντρο ότι: $x_i = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

επομένως : $x_2 = \dfrac{8 + c + 8 + 2c}{2} = 14 \Leftrightarrow 16 + 3c = 28 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$

Δ2. $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} \Leftrightarrow \overline{x} = \dfrac{10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22v_4}{45 + v_4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 14 = \frac{10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22v_4}{45 + v_4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14 \cdot \left(45 + v_4\right) = 590 + 22v_4 \Leftrightarrow 630 + 14v_4 = 590 + 22v_4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8v_4 = 40 \Leftrightarrow v_4 = \frac{40}{8} = 5 \Leftrightarrow v_4 = 5$$

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8,12)	10	20
[12,16)	14	15
[16,20)	18	10
[24,28)	22	5
ΣΥΝΟΛΟ		$v = 50$

Δ3. Οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες άρα στην κλάση [8,12) που περιέχονται $v=20$ παρατηρήσεις από [8-9) θα περιέχονται το $\frac{1}{4}$ του 20 δηλαδή 5 παρατηρήσεις. Επομένως πάνω από 9 λεπτά χρειάστηκαν

$\frac{3}{4}v_1+v_2+v_3+v_4=\frac{3}{4}20+15+10+5=45$ υπολογιστές

Δ4. Για την τυπική απόκλιση ισχύει : $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot v_i}{v}=$

$$=\frac{(10-14)^2\cdot 20+(14-14)^2\cdot 20+(18-14)^2\cdot 20+(22-14)^2\cdot 20}{50}\Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot v_i}{v}=\frac{800}{50}=16 \text{ άρα } s=4$$

Από τον συντελεστή μεταβλητότητας έχουμε :

$$CV_x=\frac{s}{\left|\bar{x}\right|}=\frac{4}{14}\simeq 0{,}28>0{,}1 \text{ ή } \left(28\%>10\%\right)$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Έστω ο αρχικός χρόνος x_i και ο τελικός χρόνος y_i. Ο χρόνος κάθε υπολογιστή θα πολλαπλασιαστεί με 0,8 συνεπώς από βασική εφαρμογή του σχολικού θα ισχύει :

$$\bar{y}=0{,}8\cdot\bar{x}$$

$$S_y=\left|0{,}8\right|\cdot S_x=0{,}8\cdot S_x$$

$$CV_y=\frac{S_y}{\left|\bar{y}\right|}=\frac{0{,}8\cdot 5s_x}{0{,}8\bar{x}}=\frac{5s_x}{\bar{x}}=CV_x$$

Το CV παραμένει αμετάβλητο συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.