Αποδείξεις

1. Απόδειξη της σχέσης $f = \dfrac{1}{\mathrm{T}}$

$$f = \frac{N}{t} \xrightarrow{N=1 \rightarrow t=T} f = \frac{1}{T}$$

2. Απόδειξη της σχέσης $\omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi f$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \xrightarrow{t=T \rightarrow \Delta\phi=2\pi} \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \xrightarrow{f=1/T} \omega = 2\pi f$$

3. Απόδειξη της σχέσης $x = \mathrm{A}\cdot\eta\mu\left(\omega\cdot t+\varphi_0\right)$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την Α.Α.Τ. είναι :

$$\Sigma F = -D\cdot x \rightarrow m\cdot a = -D\cdot x \rightarrow m\cdot\frac{d\upsilon^2}{dt^2} + D\cdot x = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια Ομογενής Διαφορική Εξίσωση με λύση

$$x = \mathrm{A}\cdot\eta\mu\left(\omega\cdot t+\varphi_0\right)$$

4. Απόδειξη της σχέσης $\upsilon = \mathrm{A}\cdot\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\omega\cdot t+\varphi_0\right)$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left[\mathrm{A}\eta\mu\left(\omega t+\varphi_0\right)\right]}{dt} = \mathrm{A}\frac{d\left[\eta\mu\left(\omega t+\varphi_0\right)\right]}{dt} = \mathrm{A}\cdot\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\omega t+\varphi_0\right)$$

5. Απόδειξη της σχέσης $\alpha = -\mathrm{A}\cdot\omega^2\cdot\eta\mu\left(\omega t+\varphi_0\right)$

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\left[+\mathrm{A}\omega\sigma\upsilon\nu\left(\omega t+\varphi_0\right)\right]}{dt} = \mathrm{A}\omega\frac{d\left[\sigma\upsilon\nu\left(\omega t+\varphi_0\right)\right]}{dt} = -\mathrm{A}\cdot\omega^2\cdot\eta\mu\left(\omega t+\varphi_0\right)$$

6.

Απόδειξη της σχέσης

$$\left.\begin{aligned} &x = \mathrm{A}\eta\mu\left(\omega t+\varphi_0\right)\\ &\upsilon = \mathrm{A}\omega\sigma\upsilon\nu\left(\omega t+\varphi_0\right) = +\mathrm{A}\omega\eta\mu\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Delta\varphi_{\upsilon-\chi} = \varphi_\upsilon - \varphi_\chi \Rightarrow \Delta\varphi_{\upsilon-\chi} = \omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}-\omega t-\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

7. Απόδειξη της σχέσης $\Delta\varphi_{\alpha-\upsilon} = +\frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon = \mathrm{A}\omega\sigma\upsilon\nu\left(\omega t+\varphi_0\right)\\ &\alpha = -\mathrm{A}\omega^2\eta\mu\left(\omega t+\varphi_0\right) = \mathrm{A}\omega^2\sigma\upsilon\nu\left[\left(\omega t+\varphi_0\right)+\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Delta\varphi_{\alpha-\upsilon} = \varphi_\alpha - \varphi_\upsilon = \omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}-\omega t-\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

8. Απόδειξη της σχέσης $\Delta\varphi_{\alpha-x} = +\pi$

$$\left.\begin{aligned} &x = \mathrm{A}\eta\mu\left(\omega t+\varphi_0\right)\\ &\alpha = -\mathrm{A}\omega^2\eta\mu\left(\omega t+\varphi_0\right) = \mathrm{A}\omega^2\eta\mu\left[\left(\omega t+\varphi_0\right)+\pi\right]\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Delta\varphi_{\alpha-\chi} = \varphi_\alpha - \varphi_\chi = \omega t+\varphi_0+\pi-\omega t-\varphi_0 = \pi$$

9. Απόδειξη της σχέσης $\alpha = -\omega^2 x$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = -\mathrm{A}\omega^2 \eta\mu(\omega t+\varphi_0) = -\omega^2\left[\mathrm{A}\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\right] \\ &x = \mathrm{A}\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = -\omega^2 x$$

10. Απόδειξη της σχέσης $\upsilon = \pm\omega\sqrt{\mathrm{A}^2 - \chi^2}$

$$\left.\begin{aligned} &x = \mathrm{A}\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \to \eta\mu(\omega t+\varphi_0) = \frac{x}{\mathrm{A}} \to \eta\mu^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{x^2}{\mathrm{A}^2} \\ &\upsilon = \mathrm{A}\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0) \to \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0) = \frac{\upsilon}{\mathrm{A}\omega} \to \sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{\upsilon^2}{\mathrm{A}^2\omega^2} \\ &\eta\mu^2(\omega t+\varphi_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_0) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{\upsilon^2}{\mathrm{A}^2\omega^2} = 1 \ (\text{Ε}\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \ \text{Έ}\lambda\varepsilon\iota\psi\eta\varsigma) \to \upsilon = \pm\omega\sqrt{\mathrm{A}^2 - x^2}$$

11. Απόδειξη της σχέσης $\alpha = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{\max}^2 - \upsilon^2}$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = -\mathrm{A}\omega^2\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \to \eta\mu(\omega t+\varphi_0) = \frac{\alpha}{\mathrm{A}\omega^2} \to \eta\mu^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{\alpha^2}{(\mathrm{A}\omega^2)^2} \\ &\upsilon = \mathrm{A}\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0) \to \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0) = \frac{\upsilon}{\mathrm{A}\omega} \to \sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{\upsilon^2}{\mathrm{A}^2\omega^2} \\ &\eta\mu^2(\omega t+\varphi_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_0) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{(\mathrm{A}\omega^2)^2} + \frac{\upsilon^2}{\mathrm{A}^2\omega^2} = 1 \ (\text{Ε}\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \ \text{Έ}\lambda\varepsilon\iota\psi\eta\varsigma) \to \alpha = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{\max}^2 - \upsilon^2}$$

12. Απόδειξη της σχέσης ΣF=-Dx με D=mω²

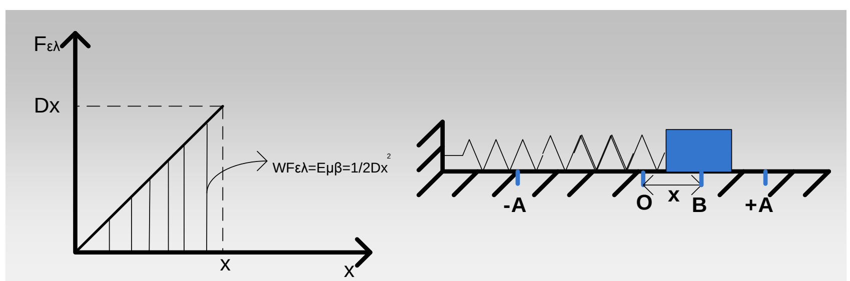
13. $\left.\begin{array}{l}\Sigma F = m\cdot a \\ \alpha = -\omega^2\cdot x\end{array}\right\} \to \Sigma F = -m\cdot\omega^2\cdot x \xrightarrow{D=m\cdot\omega^2} \Sigma F = -D\cdot x$ Απόδειξη της σχέσης $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

$$\left.\begin{array}{l}D = m\cdot\omega^2 \\ \omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}\end{array}\right\} \to D = m\cdot\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)^2 = m\cdot\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2} \to \mathrm{T}^2 = 4\pi^2\cdot\frac{m}{D} \to \mathrm{T} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$$

14. Απόδειξη της σχέσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$

$$\left.\begin{array}{l}U_B = \mathrm{E}_{\pi\rho o\sigma\varphi(0\to B)} \\ \mathrm{E}_{\pi\rho o\sigma\varphi(O\to B)} = W_{F_{\varepsilon\lambda}(O\to B)}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$U_B = W_{F_{\varepsilon\lambda}(O\to B)} \to U_B = \frac{1}{2}Dx^2$$



Το $W_{\Sigma F}$ υπολογίζεται από το εμβαδό της ΣF-x για -A<x<A και είναι $W_{\Sigma F}=1/2Dx^2$

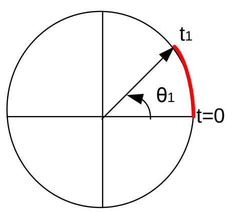
15. Εύρεση των x στα οποία $\mathrm{K} = U$

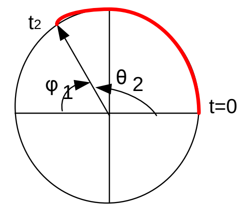
$$\mathrm{E}_{\tau\alpha\lambda} = \mathrm{K} + U \xrightarrow{\mathrm{K}=U} \mathrm{E}_{\tau\alpha\lambda} = 2U \to \frac{1}{2}D\mathrm{A}^2 = 2\frac{1}{2}Dx^2 \to x^2 = \frac{\mathrm{A}^2}{2} \to x = \pm\frac{\mathrm{A}\sqrt{2}}{2}$$

16 Εύρεση των υ στις οποίες $K=U$

$$E_{\tau\alpha\lambda}=K+U\xrightarrow{K=U}E_{\tau\alpha\lambda}=2K\rightarrow\frac{1}{2}M\upsilon_{\max}{}^{2}=2\frac{1}{2}M\upsilon^{2}\rightarrow\upsilon^{2}=\frac{\upsilon_{\max}}{2}^{2}\rightarrow\upsilon=\pm\frac{\upsilon_{\max}\sqrt{2}}{2}$$

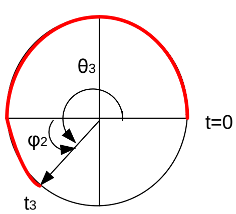
17. Εύρεση των χρονικών στιγμών στις οποίες $K=U$

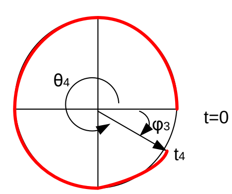




$$\eta\mu\theta_1=\frac{|x|}{A}=\frac{\left|\frac{A\sqrt{2}}{2}\right|}{A}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$
$$\omega t_1=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t_1=\frac{\pi}{4\omega}=\frac{\pi}{4\frac{2\pi}{T}}\Rightarrow t_1=\frac{T}{8}$$

$$\eta\mu\varphi_1=\frac{|x|}{A}=\frac{\left|\frac{A\sqrt{2}}{2}\right|}{A}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\phi_1=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$
$$\theta_2=\pi-\phi_1\Rightarrow\omega t_2=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow t_2=\frac{3\pi}{4\omega}=\frac{3\pi}{4\frac{2\pi}{T}}\Rightarrow t_1=\frac{3T}{8}$$





$$\eta\mu\varphi_2=\frac{|x|}{A}=\frac{\left|\frac{-A\sqrt{2}}{2}\right|}{A}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\phi_2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$
$$\theta_3=\pi+\phi_2\Rightarrow\omega t_3=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow t_3=\frac{5\pi}{4\omega}=\frac{5\pi}{4\frac{2\pi}{T}}\Rightarrow t_3=\frac{5T}{8}$$

$$\eta\mu\varphi_3=\frac{|x|}{A}=\frac{\left|\frac{-A\sqrt{2}}{2}\right|}{A}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\phi_3=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$
$$\theta_4=2\pi-\phi_3\Rightarrow\omega t_4=\frac{7\pi}{4}\Rightarrow t_4=\frac{7\pi}{4\omega}=\frac{7\pi}{4\frac{2\pi}{T}}\Rightarrow t_4=\frac{7T}{8}$$

18. Απόδειξη της σχέσης $\frac{dp}{dt}=\Sigma F=-DX$

$$p = m \cdot \upsilon \rightarrow \frac{dp}{dt} = m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = m \cdot a = \Sigma F = -D \cdot x$$

19. Απόδειξη της σχέσης $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -D \cdot x \cdot \upsilon$

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 \rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2\upsilon \frac{dx}{dt} \rightarrow$$
$$\frac{dK}{dt} = m \cdot a \cdot \upsilon = \Sigma F \cdot \upsilon \rightarrow \frac{dK}{dt} = -D \cdot x \cdot \upsilon$$

20. Απόδειξη της σχέσης $\frac{dE_{\tau\alpha\lambda}}{dt} = 0$

$$E_{\tau\alpha\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta. \rightarrow \frac{dE_{\tau\alpha\lambda}}{dt} = 0$$

21. Απόδειξη της σχέσης $\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = D \cdot x \cdot \upsilon$

$$E_{\tau\alpha\lambda} = K + U \rightarrow \frac{dE_{\tau\alpha\lambda}}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \xrightarrow{\frac{dE_{\tau\alpha\lambda}}{dt}=0}$$
$$\rightarrow 0 = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \xrightarrow{\frac{dK}{dt}=-Dx\upsilon}$$
$$\rightarrow \frac{dU}{dt} = D \cdot x \cdot \upsilon$$

Αποδείξεις

1.Απόδειξη της σχέσης $q = Q\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\mathrm{E}_{\tau\alpha\lambda} = U_{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{E}} \rightarrow \mathrm{E} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{c} \rightarrow$$

$$\frac{d\mathrm{E}_{\tau\alpha\lambda}}{dt} = \frac{1}{2}L\frac{d(c^2)}{dt} + \frac{1}{2}\frac{1}{c}\frac{d(q^2)}{dt} \xrightarrow{\mathrm{E}_{\tau\alpha\lambda}=\sigma\tau\alpha\vartheta}$$

$$0 = \frac{1}{2}L2i\frac{di}{dt} + \frac{1}{2}\frac{1}{c}2q\frac{dq}{dt} \rightarrow Li\frac{d^2q}{dt} + \frac{q}{c}i = 0 \quad \rightarrow L\frac{d^2q}{dt} + \frac{q}{c} = 0$$

Ομογενής Διαφορική Εξίσωση με λύση $q = Q\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

2.Απόδειξη της σχέσης $i = Q\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

$$i = {dq}/{dt} = \frac{d\left[Q\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\right]}{dt} = Q\frac{d\left[\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\right]}{dt} = Q\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

3.Απόδειξη της σχέσης $\Delta\varphi_{i-q} = \frac{+\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} q = Q\omega\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \\ i = Q\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = Q\omega\eta\mu\left(\omega t + \varphi_0 + {\pi}/{2}\right) \end{array}\right\} \Delta\varphi_{i-x} = \varphi_i - \varphi_q \rightarrow \Delta\varphi_{i-q} = \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} - \omega t - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

4.Απόδειξη της σχέσης $q = \pm\frac{1}{\omega}\sqrt{i^2 - I^2}$

$$\mathrm{E}_{\tau\alpha\lambda} = U_{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{E}} \rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \rightarrow Q^2 = LCi^2 + q^2 \rightarrow Q^2 = \frac{i^2}{\omega^2} + q^2 \rightarrow i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$$

5.Απόδειξη της σχέσης $i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$

$$U_{\mathrm{E}} + U_{\mathrm{B}} = \mathrm{E}_{\tau\alpha\lambda} \rightarrow \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI^2 \rightarrow q^2 = LC\left(I^2 - i^2\right) \rightarrow q = \pm\frac{1}{\omega}\sqrt{I^2 - i^2}$$

$$U_{\mathrm{E}} = U_{\mathrm{B}}$$

6.Εύρεση των q στα οποία

$$E_{\tau\alpha\lambda} = U_B + U_E \rightarrow E_{\tau\alpha\lambda} = 2U_E \rightarrow \frac{Q^2}{2C} = 2\frac{q^2}{2C} \rightarrow q = \pm\frac{Q\sqrt{2}}{2}$$

7. Εύρεση των i στα οποία $U_E = U_B$

$$E_{\tau\alpha\lambda} = U_B + U_E \rightarrow E_{\tau\alpha\lambda} = 2U_B \rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = 2\frac{1}{2}Li^2 \rightarrow i = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}I$$

8. Εύρεση των t στους οποίους $U_E = U_B$

Ισχύει ότι t=T/8, 3T/8, 5T/8, 7T/8 ……ομοίως με την αποδειξη 17 στις Μηχανικές Ταλαντώσεις.

9.Απόδειξη της σχέσης $\frac{dV_c}{dt} = \frac{dV_L}{dt} = \frac{i}{C}$

$$V_c = V_L \rightarrow V_c = V_L = \frac{q}{C} \rightarrow \frac{dV_c}{dt} = \frac{dV_L}{dt} = \frac{1}{C}\cdot\frac{dq}{dt} \rightarrow$$
$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{dV_L}{dt} = \frac{i}{C}$$

10.Απόδειξη της σχέσης $\frac{dU_E}{dt} = -\frac{dU_B}{dt} = \frac{iq}{c}$

$$E_{\text{ΤΑΛ}}=U_B+U_E \rightarrow \frac{dE_{\text{ΤΑΛ}}}{dt}=\frac{dU_B}{dt}+\frac{dU_E}{dt} \rightarrow 0=\frac{dU_B}{dt}+\frac{dU_E}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dU_{\text{Ε}}}{dt}=-\frac{dU_{\text{Β}}}{dt}$$

$$U_E=E_{\text{ΤΑΛ}}\cdot \eta\mu^2(\omega t+\phi_0) \rightarrow \frac{dU_{\text{Ε}}}{dt}=E_{\text{ΤΑΛ}}\frac{d(\eta\mu^2(\omega t+\phi_0))}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dU_{\text{Ε}}}{dt}=E_{\text{ΤΑΛ}}2\eta\mu(\omega t+\phi_0)\frac{d(\eta\mu\ (\omega t+\phi_0))}{dt}\frac{d(\omega t+\phi_0)}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dU_{\text{Ε}}}{dt}=\frac{Q^2}{2\cdot C}\cdot 2\omega\eta\mu(\omega t+\phi_0)\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dU_{\text{Ε}}}{dt}=\frac{1}{C}(Q\cdot\eta\mu(\omega t+\phi_0))\cdot(Q\cdot\omega\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0)) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dU_{\text{Ε}}}{dt}=-\frac{dU_{\text{Β}}}{dt}=\frac{iq}{c}$$

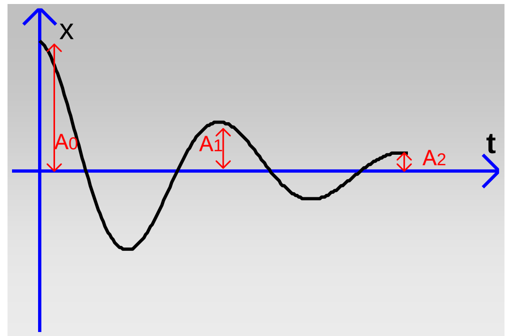
11.Απόδειξη της σχέσης $di/dt=-\omega^2 q$

$$V_c=V_L=-L\cdot\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{q}{C}=-L\cdot\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt}=-\frac{q}{C\cdot L} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{di}{dt}=-\omega^2\cdot q$$

- Σε μια φθίνουσα ταλάντωση ο λόγος των διαδοχικών πλατών μένει σταθερός.

$$\frac{A_N}{A_{N+1}} = \sigma\tau\alpha\vartheta \Rightarrow \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \sigma\tau\alpha\vartheta$$



Απόδειξη

$$\frac{A_N}{A_{N+1}} = \frac{A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot N \cdot T}}{A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot (N+1) \cdot T}} = \frac{e^{-\Lambda \cdot N \cdot T}}{e^{-\Lambda \cdot (N+1) \cdot T}} =$$
$$= e^{-\Lambda \cdot N \cdot T + \Lambda \cdot (N+1) \cdot T} = e^{\Lambda \cdot T} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

- Χρόνος Ημίσειας Ζωής $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\Lambda}$

Είναι ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει το αρχικό πλάτος μισό, δηλαδή

$A_0 \rightarrow A_0/2$ ή $A_0/2 \rightarrow A_0/4$

Απόδειξη

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \rightarrow \ln\left(1/2\right) = \ln\left(e^{-\Lambda t_{1/2}}\right) \rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\Lambda t_{1/2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\ln 2 = -\Lambda t_{1/2} \rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

- Ενέργεια Φθίνουσας Ταλάντωσης $E = E_0 e^{-2\Lambda t}$

Απόδειξη

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D \left(A_0 e^{-\Lambda t}\right)^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

Απόδειξη της περιόδου διακροτήματος

Το πλάτος Α' μηδενίζεται όταν

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)=\sigma\upsilon\nu(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t=(2k+1)\frac{\pi}{2}\begin{cases}\xrightarrow{\kappa=1}\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_1=\frac{\pi}{2}\rightarrow t_1=\frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|}\\ \xrightarrow{k=2}\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_2=\frac{3\pi}{2}\rightarrow t_2=\frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|}\end{cases}$$

$$\acute{o}\mu\omega\varsigma\ \mathrm{T}_\delta=t_2-t_1=\frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|}-\frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|}=\frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}\rightarrow$$

$$\mathrm{T}_\delta=\frac{1}{|f_1-f_2|}\rightarrow f_\delta=|f_1-f_2|$$

$C=\lambda f$

Απόδειξη:

$$x=c\cdot t\xrightarrow{\text{οταν } t=T\rightarrow x=\lambda}\lambda=c\cdot\frac{1}{f}\rightarrow c=\lambda\cdot f$$

Διαφορά φάσης δύο σημείων την ίδια χρονική στιγμή.

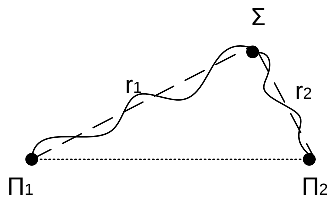
$$\left.\begin{array}{l}\Delta\phi=\phi_2-\phi_1\\ \phi_2=2\pi(\frac{t}{\mathrm{T}}+\frac{x_2}{\lambda})\\ \phi_1=2\pi(\frac{t}{\mathrm{T}}+\frac{x_1}{\lambda})\end{array}\right\}\rightarrow\Delta\phi=2\pi\cdot(\frac{t}{\mathrm{T}}+\frac{x_2}{\lambda}-\frac{t}{\mathrm{T}}-\frac{x_1}{\lambda})\rightarrow\Delta\phi=2\pi\cdot\frac{\Delta x}{\lambda}$$

$$\Delta\phi=2\pi\cdot\frac{\Delta t}{T}$$

Διαφορά φάσης ενός σημείου σε χρονικό διάστημα Δt.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \\ \phi_2 = 2\pi(\frac{t_2}{\mathrm{T}} + \frac{x}{\lambda}) \\ \phi_1 = 2\pi(\frac{t_1}{\mathrm{T}} + \frac{x}{\lambda}) \end{array}\right\} \rightarrow \Delta\phi = 2\pi \cdot (\frac{t_2}{\mathrm{T}} + \frac{x}{\lambda} - \frac{t_1}{\mathrm{T}} - \frac{x}{\lambda}) \rightarrow \Delta\phi = 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T}$$

Μαθηματική μελέτη της συμβολής



Υποθέτουμε ότι δύο σημεία Π1 και Π2 της επιφάνειας του υγρού γίνονται σύγχρονες πηγές παραγωγής αρμονικών κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους. Επειδή τα κύματα διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα, θα έχουν και το ίδιο μήκος κύματος. Θεωρούμε ένα σημείο Σ, το οποίο απέχει αποστάσεις r_1 και r_2 από τις πηγές Π1 και Π2 αντίστοιχα. Η απομάκρυνση του σημείου Σ που οφείλεται σε κάθε κύμα χωριστά υπολογίζεται ακολούθως:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \\ y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \end{array}\right\} \xrightarrow{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}} y = y_1 + y_2 \rightarrow$$

$$y = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$$

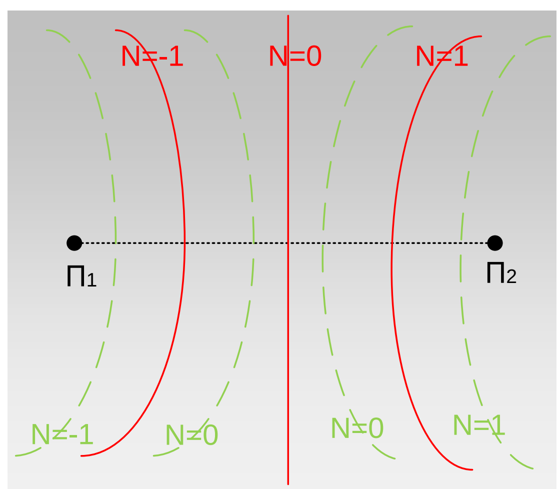
Το πλάτος της ταλάντωσης δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{A}' = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)$$

Σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

$$\Pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ \ \mathrm{A}' = \pm 2A \rightarrow 2A\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right) = \pm 2A \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right) = \sigma\upsilon\nu k\pi \rightarrow 2\pi\left|\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right| = k\pi \rightarrow$$



$$\left|r_1 - r_2\right| = \kappa\cdot\lambda\ ,\kappa = 0,1,2,3,....$$

Σημεία που παραμένουν ακίνητα.

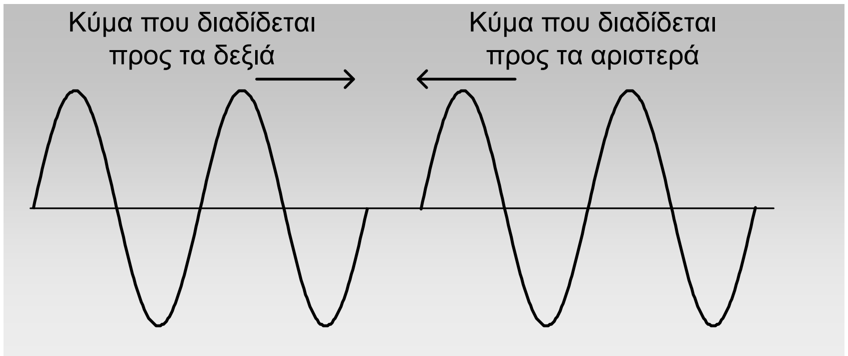
$$\Pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ \ \mathrm{A}' = 0 \rightarrow 2A\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right) = \sigma\upsilon\nu(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \rightarrow 2\pi\left|\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right| = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$\left|r_1 - r_2\right| = (2\kappa+1)\cdot\frac{\lambda}{2}\quad ,\kappa = 0,1,2,3,....$$

Στάσιμα κύματα.

Έστω δύο κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας διαδίδονται με αντίθετη φορά μέσα στο ίδιο ελαστικό μέσο



Τα δύο κύματα συμβάλλουν. Η κίνηση του μέσου ονομάζεται στάσιμο κύμα.

Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με αντίθετες κατευθύνσεις.

Εξίσωση στάσιμου κύματος.

Έστω το αρμονικό κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά του άξονα x όπως στο παραπάνω σχήμα και ένα δεύτερο κύμα με ίδιο πλάτος και ίδια συχνότητα, που διαδίδεται κατά την αντίθετη κατεύθυνση προς τα αριστερά. Τότε θα ισχύουν:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\\ y_2 &= A\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}} y = y_1 + y_2 \rightarrow$$

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$$

Πλάτος στάσιμου κύματος.

$$\mathrm{A}' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

Σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος – <u>Κοιλίες</u>.

$$\Pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota \quad \mathrm{A}' = \pm 2A \rightarrow 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right) = \pm 2A \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sigma\upsilon\nu k\pi \rightarrow 2\pi \left|\frac{x}{\lambda}\right| = k\pi \rightarrow$$

$$x_{\mathrm{K}} = \kappa \cdot \frac{\lambda}{2} \quad , \kappa = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Σημεία που παραμένουν ακίνητα – <u>Δεσμοί</u>.

$$\Pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota \quad \mathrm{A}' = 0 \rightarrow 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sigma\upsilon\nu (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow 2\pi \left|\frac{x}{\lambda}\right| = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow x_{\Delta} = (2\kappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \quad , \kappa = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ή κοιλιών.

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{2}}$$

$$x_{K1} = \kappa \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\kappa=0} x_{K1} = 0 \\ \xrightarrow{\kappa=1} x_{K2} = \dfrac{\lambda}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x = x_{K2} - x_{K1} = \frac{\lambda}{2}$$

Απόσταση μεταξύ ενός διαδοχικού δεσμού και μιας κοιλίας $\boxed{\Delta x = \dfrac{\lambda}{4}}$

$$\left. \begin{array}{l} x_{K1} = \kappa \cdot \dfrac{\lambda}{2} \\ x_{\Delta 1} = (2\kappa + 1) \cdot \dfrac{\lambda}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\kappa=0} x_{K1} = 0 \\ \xrightarrow{\kappa=0} x_{\Delta 1} = \dfrac{\lambda}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x = x_{\Delta 1} - x_{K1} = \frac{\lambda}{4}$$

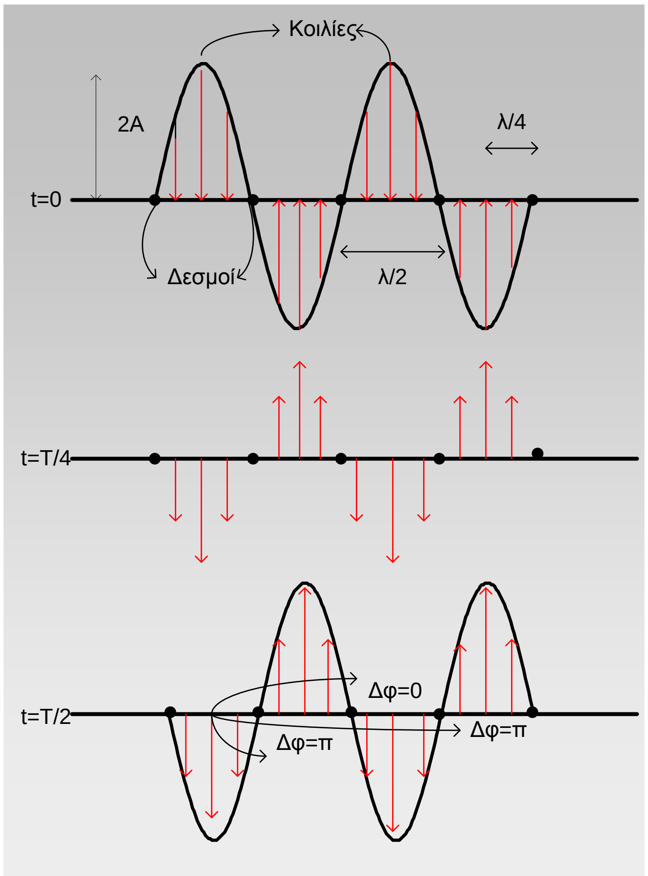
Διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων του Στάσιμου κύματος.

Τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν διαφορά φάσης

$$\boxed{\Delta \phi = 0}$$

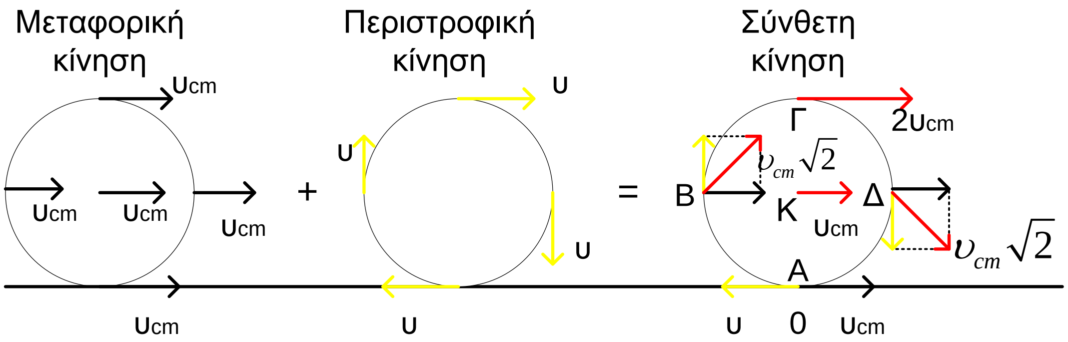
Τα σημεία που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού έχουν διαφορά φάσης

$$\boxed{\Delta \phi = \pi}$$



Κύλιση τροχού.

Εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης, όλα τα σημεία του τροχού έχουν την ίδια ταχύτητα, η οποία είναι ίση με την ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου μάζας του τροχού.
Εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης, όλα τα σημεία της περιφέρειας του τροχού έχουν γραμμική ταχύτητα υ ίδιου μέτρου, το διάνυσμα της οποίας είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της περιφέρειας.



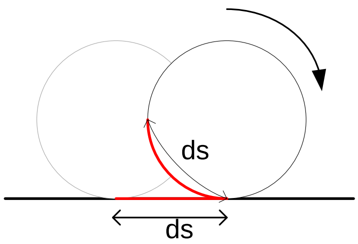
Κύλιση χωρίς ολίσθηση σημαίνει ότι το σημείο Α που έρχεται σε επαφή με το έδαφος έχει μηδενική ταχύτητα .Άρα θα έχουμε :

$$\upsilon_{A} = 0 \rightarrow \upsilon = \upsilon_{cm} \qquad \upsilon_{B} = \upsilon_{\Delta} = \upsilon_{cm}\sqrt{2}$$

$$\upsilon_{\Gamma} = \upsilon_{cm} + \upsilon = 2\upsilon_{cm} \qquad \upsilon_{K} = \upsilon_{cm}$$

Σχέση ταχύτητας του κέντρου μάζας υ_{cm} και γωνιακής ταχύτητας ω

$$\upsilon_{cm} = \omega \cdot R$$



$$\upsilon_{cm} = \frac{ds}{dt} \xrightarrow{ds = R \cdot d\theta} \upsilon_{cm} = R \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\xrightarrow{\frac{d\theta}{dt} = \omega} \upsilon_{cm} = \omega \cdot R$$

Σχέση επιτάχυνσης του κέντρου μάζας α_{cm} (ή επιτρόχιας επιτάχυνσης α_ε)και γωνιακής επιτάχυνσης $\alpha_{\gamma\omega\nu}$

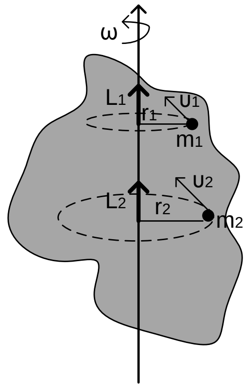
$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

$$\alpha_{cm} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} \xrightarrow{\upsilon_{cm}=\omega \cdot R} \alpha_{cm} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt}$$

$$\alpha_{cm} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \xrightarrow{\frac{d\omega}{dt}=a_{\gamma\omega\nu}} \alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

$$\xrightarrow{\alpha_{cm}=\alpha_\varepsilon} \alpha_{cm} = \alpha_\varepsilon = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

Στροφορμή στερεού σώματος.



Έστω ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω. Κατά την περιστροφή του σώματος τα διάφορα σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές τα επίπεδα των οποίων είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Όλα τα σημεία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, η γραμμική ταχύτητά τους όμως είναι διαφορετική, και μάλιστα ανάλογη με την απόστασή τους από τον άξονα περιστροφής. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα, με μάζες m_1, m_2 … , τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι στροφορμές των στοιχειωδών αυτών μαζών έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση. Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν. Επειδή τα υλικά σημεία m_1, m_2 … κάνουν κυκλική κίνηση οι ταχύτητές τους υ_1, υ_2 … μπορούν να γραφούν επομένως

$$L = L_1 + L_2 + \ldots = m_1\upsilon_1 r_1 + m_2\upsilon_2 r_2 + \ldots$$

$$\xrightarrow{\upsilon_1=\omega r_1, \upsilon_2=\omega r_2 \ldots} L = m_1\omega r_1{}^2 + m_2\omega r_2{}^2 + \ldots \rightarrow$$

$$L = \omega(m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + \ldots) \xrightarrow{I=(m_1r_1{}^2+m_2r_2{}^2+\ldots)} L = I\omega$$

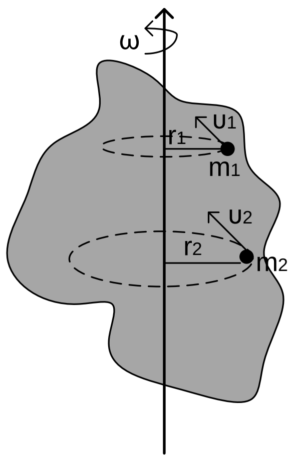
Η στροφορμή λοιπόν ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα ισούται με

$$L = I \cdot \omega$$

έχει τη διεύθυνση του άξονα και η φορά της ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Κινητική Ενέργεια λόγω περιστροφής.

Ένα σώμα που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από έναν άξονα, έχει κινητική ενέργεια. Προκειμένου να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος, το χωρίζουμε σε στοιχειώδεις μάζες , m_1, m_2 … Οι μάζες αυτές έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμικές ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις $\upsilon_1=\omega\ r_1$, $\upsilon_2=\omega\ r_2$,… Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται, έτσι έχουμε:



$$K = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \ldots \rightarrow K = \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 r_2^2 + \ldots \rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\right)\omega^2 \xrightarrow{I=m_1r_1^2+m_2r_2^2} K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Αν το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως ο τροχός του σχήματος η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης.

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \upsilon_{cm}{}^{2} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{I} \cdot \omega^{2}$$

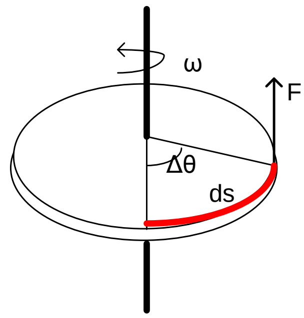
όπου M η μάζα του σώματος και υ_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του.

Έργο σταθερής ροπής.

Έστω ότι η δύναμη **F** ασκείται στην περιφέρεια ενός τροχού ακτίνας R, κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης . Κατά την απειροστά μικρή στροφή του τροχού κατά γωνία dθ η δύναμη παράγει έργο

$$dW = F \cdot ds \xrightarrow{ds = R \cdot d\theta} dW = F \cdot R \cdot d\theta$$

$$\xrightarrow{\tau = F \cdot R} dW = \tau \cdot d\theta$$



Για να υπολογίσουμε το έργο μιας δύναμης καθώς ένα σώμα στρέφεται κατά γωνία θ χωρίζουμε τη γωνία σε απειροστά μικρές γωνίες , dθ1,dθ 2 ...και αθροίζουμε τα αντίστοιχα έργα. Αν η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, τότε, από το άθροισμα προκύπτει

$$W = \Sigma W = \Sigma dw \xrightarrow{dw = dw_1 + dw_2 + \ldots = \tau \cdot d\theta_1 + \tau \cdot d\theta_2 + \ldots} \quad W = \tau \cdot \theta$$

Ισχύς P μιας δύναμης.

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγει έργο μια δύναμη υπολογίζεται από την σχέση

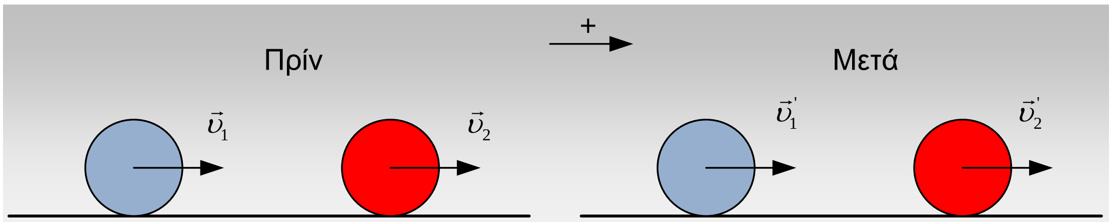
$$P = \frac{dw}{dt} \rightarrow P = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \quad P = \tau \cdot \omega$$

Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας.

Η ροπή μιας δύναμης μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του σώματος κατά ποσότητα ίση με το έργο της. Έτσι, στη στροφική κίνηση, το θεώρημα έργου - ενέργειας παίρνει τη μορφή δηλαδή **το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.**

$$\Sigma W = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{I} \cdot \omega_{\tau\varepsilon\lambda}{}^{2} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{I} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi}{}^{2}$$

Κεντρική και ελαστική κρούση.
Θεωρούμε τη μετωπική ελαστική κρούση ανάμεσα σε δύο σφαίρες Σ1 και Σ2, με μάζες m_1 και m_2 που οι ταχύτητες τους είναι αντίστοιχα υ_1 , πριν τη κρούση και υ_2 , μετά την κρούση.



Εφόσον αυτές οι ταχύτητες βρίσκονται πάνω στην ευθεία x΄x μπορούμε να θεωρήσουμε αυτή την ευθεία σαν άξονα με θετική φορά που σημειώνεται στο σχήμα και να γράψουμε την αρχή διατήρησης της ορμής με αλγεβρική μορφή.
Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας έχουμε :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \Rightarrow m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \Rightarrow m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2)(1)$$

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$$

$$m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2) \Rightarrow$$

$$m_1(\upsilon_1 + \upsilon_1')(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' + \upsilon_2)(\upsilon_2' - \upsilon_2)(2)$$

Διαιρούμε τις (2) και (1) κατά μέλη και βρίσκουμε:

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'(3)$$

Επιλύνοντας το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων που προέρχονται από τις σχέσεις :

$$(1) \Rightarrow m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$$

$$(3) \Rightarrow \upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'$$

Βρίσκουμε ότι:

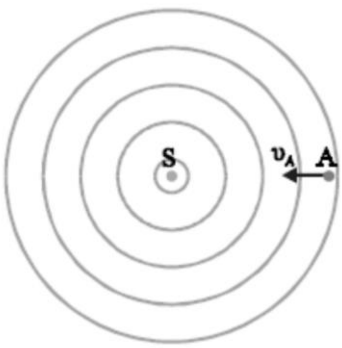
$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}(4)$$

$$\upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}(5)$$

<u>Ακίνητη πηγή - κινούμενος παρατηρητής</u>

- Ο παρατηρητής Α πλησιάζει προς την ακίνητη ηχητική πηγή με ταχύτητα υ_A. Τώρα στον παρατηρητή φτάνουν περισσότερα μέγιστα στη μονάδα του χρόνου από όσα παράγει στον ίδιο χρόνο η πηγή. Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον παρατηρητή θα είναι:

$$\upsilon' = \upsilon + \upsilon_A \qquad \lambda_A = \lambda$$



Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα είναι :

$$f_A = \frac{\upsilon'}{\lambda_A}$$

Όμως ισχύει ότι:

$$f_A = \frac{\upsilon'}{\lambda} \xrightarrow{\lambda = \frac{\upsilon}{f_s}} f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_s$$

Επομένως όμως και τελικά δηλαδή **η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη από αυτήν που εκπέμπει η πηγή.**

- Αν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την ακίνητη ηχητική πηγή με ταχύτητα υ_A, στη μονάδα του χρόνου στον παρατηρητή φτάνουν λιγότερα μέγιστα από αυτά που παράγει η πηγή στον ίδιο χρόνο η πηγή. Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον παρατηρητή θα είναι:

$$\upsilon' = \upsilon - \upsilon_A$$

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα είναι :

$$f_A = \frac{\upsilon'}{\lambda_A}$$

Όμως ισχύει ότι:

$$\lambda_A = \lambda$$

Επομένως

$$f_A = \frac{\upsilon'}{\lambda} \xrightarrow{\lambda = \frac{\upsilon'}{f_s}} f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_s$$

όμως και τελικά δηλαδή **η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μικρότερη από αυτήν που εκπέμπει η πηγή.**

Συνοψίζοντας τις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε στη σχέση:

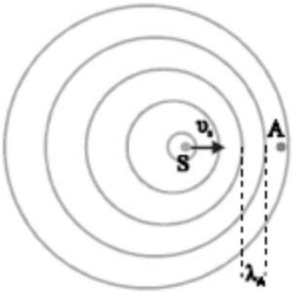
$$f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon} f_s$$

όπου το (+) ισχύει όταν ο παρατηρητής πλησιάζει προς την πηγή και το (-) όταν απομακρύνεται από αυτή.

<u>Κινούμενη πηγή - ακίνητος παρατηρητής</u>

- Υποθέτουμε τώρα ότι η πηγή κινείται ισοταχώς με ταχύτητα υ_S πλησιάζοντας τον ακίνητο παρατηρητή. Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον αέρα θα είναι

$$\upsilon' = \upsilon$$



γιατί η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται μόνο από το μέσον διάδοσης. Το μήκος κύματος που φτάνει στον παρατηρητή μικραίνει γιατί η πηγή ακολουθεί τα κύματα με αποτέλεσμα τα μέγιστα να πλησιάζουν μεταξύ τους. Ο παρατηρητής Α αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων που φτάνουν σ' αυτόν. Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην εκπομπή δύο μεγίστων είναι μία περίοδος (T). Αν τη στιγμή t η πηγή εκπέμπει ένα μέγιστο τη στιγμή t+T το μέγιστο θα έχει πλησιάσει τον παρατηρητή κατά λ αλλά και η πηγή θα τον έχει πλησιάσει κατά $\upsilon_s T$. Τότε εκπέμπεται από την πηγή το επόμενο μέγιστο. Η απόσταση ανάμεσα στα δύο διαδοχικά μέγιστα είναι $\lambda - \upsilon_s T$. Αυτή την απόσταση αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος ο παρατηρητής δηλαδή :

$$\lambda_A = \lambda - \upsilon_s T = \lambda - \frac{\upsilon_s}{f_s}$$

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα είναι :

$$f_A = \frac{\upsilon'}{\lambda_A}$$

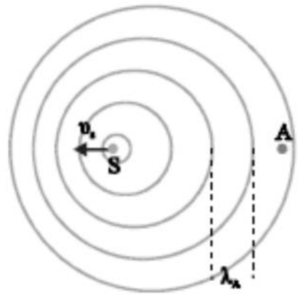
Άρα ισχύει ότι:

Επομένως

$$\left.\begin{aligned} f_A &= \frac{\upsilon'}{\lambda_A} = \frac{\upsilon}{\lambda_A} \\ \lambda_A &= \lambda - \upsilon_s T = \frac{\upsilon}{f_s} - \frac{\upsilon_s}{f_s} = \frac{\upsilon - \upsilon_s}{f_s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s} f_s$$

όμως και τελικά δηλαδή **η**

συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη από αυτήν που εκπέμπει η πηγή.



- Στην περίπτωση που η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή με σταθερή ταχύτητα υ_S . Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον αέρα θα είναι:

$$\upsilon' = \upsilon$$

γιατί η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται μόνο από το μέσον διάδοσης. Το μήκος κύματος που φτάνει στον παρατηρητή μεγαλώνει γιατί η πηγή απομακρύνεται από τα κύματα με αποτέλεσμα τα μέγιστα να απομακρύνονται μεταξύ τους. Ο παρατηρητής Α αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων που φτάνουν σ' αυτόν. Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην εκπομπή δύο μεγίστων είναι μία περίοδος (Τ). Αν τη στιγμή t η πηγή εκπέμπει ένα μέγιστο τη στιγμή t+T το μέγιστο θα έχει απομακρυνθεί από τον παρατηρητή κατά λ αλλά και η πηγή θα έχει απομακρυνθεί κατά $\upsilon_s T$. Τότε εκπέμπεται από την πηγή το επόμενο μέγιστο. Η απόσταση ανάμεσα στα δύο διαδοχικά μέγιστα είναι $\lambda + \upsilon_s T$. Αυτή την απόσταση αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος ο παρατηρητής δηλαδή :

$$\lambda_A = \lambda + \upsilon_s T = \lambda + \frac{\upsilon_s}{f_s}$$

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα είναι :

$$f_A = \frac{\upsilon'}{\lambda_A}$$

Άρα ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned} f_A &= \frac{\upsilon'}{\lambda_A} = \frac{\upsilon}{\lambda_A} \\ \lambda_A &= \lambda + \upsilon_s T = \frac{\upsilon}{f_s} + \frac{\upsilon_s}{f_s} = \frac{\upsilon + \upsilon_s}{f_s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f_s$$

Επομένως όμως και τελικά δηλαδή **η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μικρότερη από αυτήν που εκπέμπει η πηγή.**

Συνοψίζοντας τις δύο περιπτώσεις κίνησης της πηγής σε μία σχέση έχουμε:

$$f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon \mp \upsilon_s} f_s$$

όπου το (-) ισχύει όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή και το (+) όταν απομακρύνεται απ' αυτόν.

- Εάν κινούνται τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής σε σχέση με το μέσον διάδοσης τότε η σχέση που δίνει την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι:

$$f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \mp \upsilon_s} f_s$$