**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση $f$, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

**Μονάδες 7**

**Α2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0$, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**Α3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

**Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

**β)** Αν $f$, $g$ είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

**γ)** Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**δ)** Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty}\alpha^x=+\infty$.

**ε)** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος $\Delta$ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης $f$ είναι διάστημα.

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ell n x,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi$ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$ της γραφικής παράστασης της $f$ που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Αν $(\varepsilon_1)$: $y=-x$ και $(\varepsilon_2)$: $y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και τη γραφική παράσταση της $f$, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- $E_1$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ και τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, και
- $E_2$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ και τον άξονα $x'x$.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$ .

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e-1-\pi$ .

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x ημx, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$, τη γραφική παράσταση της $g$, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$ **.**

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

| ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: | *09/ 06 /2017* |
|---|---|
| ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: | ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π*** |

# ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

**Α2.** α. Λ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$ .Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

ενώ $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$

παρατηρούμε δηλαδή ότι μια συνάρτηση $f$ μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό .

**Α3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 73

**Α4.** 1. **ΛΑΘΟΣ** 2. **ΣΩΣΤΟ** 3. **ΛΑΘΟΣ** 4. **ΣΩΣΤΟ** 5. **ΣΩΣΤΟ**

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Για να ορίζεται η $f(g(x))$ πρέπει : $\left|\begin{array}{l} x\in A_g \\ \text{και} \\ g(x)\in A_f \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\neq 1 \\ \text{και} \\ \dfrac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow \underline{0<x<1} \end{array}\right.$

Συνεπώς $A_{fog}=(0,1)$ Άρα η $f\circ g$ είναι :

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

**Β2.** $h(x)=\left(f\circ g\right)(x)=\ln(\frac{x}{1-x}).\ \ x\in(0,1)$

Η $f$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγίσημων συναρτήσεων με :

$$h'(x)=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{x'\cdot(1-x)-x\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}}{(1-x)^2}=\frac{(1-x)}{x(1-x)^2}$$

$h'(x)=\dfrac{(1-x)}{x(1-x)^2}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ συνεπώς η $h$ είναι γνησίως αυξουσα στο $(0,1)$ άρα και "1-1" , άρα αντιστρέφεται. Θέτουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\ln(\frac{x}{1-x})\Leftrightarrow e^y=\frac{x}{1-x}\Leftrightarrow 1\cdot e^y-x\cdot e^y=x$$

$$\Leftrightarrow(1+e^y)\cdot x=e^y$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}$$

$x\in\left(0,1\right)\Leftrightarrow 0<\dfrac{e^y}{e^y+1}<1\Leftrightarrow y\in\mathbb{R}$. Συνεπώς: $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ με $A_{h^{-1}}=\mathbb{R}$

**Β3.**

$$\varphi(x)=\frac{e^x}{1+e^x},\varphi'(x)=\frac{(e^x)'\cdot(1+e^x)-(e^x)\cdot(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x\cdot(1+e^x)-e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=$$

$=\dfrac{e^x+(e^x)^2-(e^x)^2}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η $\varphi$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ .

$$\varphi''(x)=\frac{(e^x)'\cdot(1+e^x)^2-e^x\left[(1+e^x)^2\right]'}{(1+e^x)^4}=\frac{(e^x)\cdot(1+e^x)^2-2\cdot e^x\cdot(1+e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^4}=$$

$$=\frac{(1+e^x)\left[(e^x)\cdot(1+e^x)-2\cdot(e^x)^2\right]}{(1+e^x)^4}=\frac{e^x+(e^x)^2-2(e^x)^2}{(1+e^x)^3}=$$

$$=\frac{e^x-(e^x)^2}{(1+e^x)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

$$\varphi''(x)>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow x<0$$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f΄΄ | + | | - |
| f | $\cup\uparrow$ | | $\cap\downarrow$ |
| | | Σ.Κ | |

Η φ κυρτή στο $\left(-\infty,0\right]$ και κοίλη στο $\left[0,+\infty\right)$. Η φ παρουσιάζει στο $x_0=0$ το $M\left(0,\frac{1}{2}\right)$

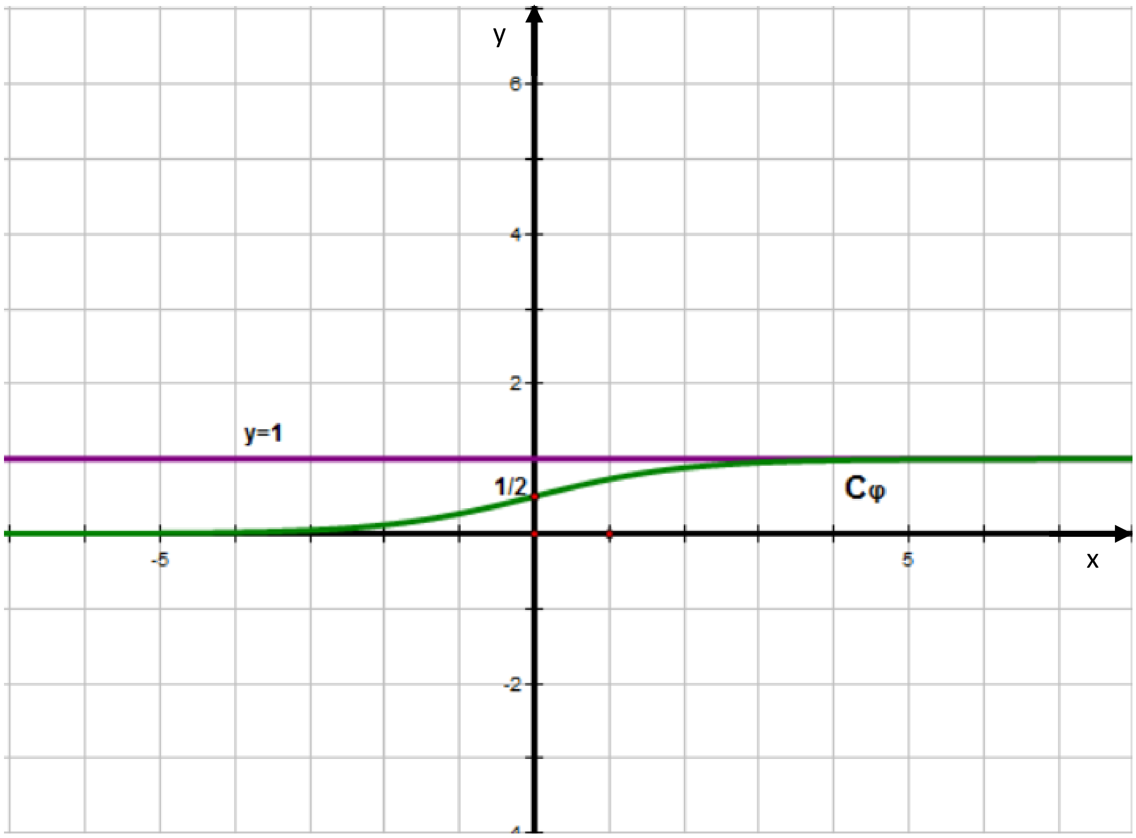
**B4.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0}{\overset{u=e^x}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{u}{u+1}=\frac{0}{0+1}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=+\infty}{\overset{u=e^x}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{u}{u+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{u}{u}=1$

Η φ έχει την (ε):y=0 οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και την (ε):y=1 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| φ΄ | + | | + |
| φ΄΄ | + | 0 | - |
| φ | 0 $\nearrow$ | 1/2 | $\nearrow$ 1 |
| | | Σ.Κ | |

Η γραφική παράσταση της φ είναι:




**<u>ΘΕΜΑ Γ</u>**

**Γ1.** $f(x) = -\eta\mu x, \qquad [0,\pi]$

$f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x, \qquad [0,\pi]$

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της $C_f$ στο οποίο δέχεται εφαπτομένη που διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$. Η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow y - \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \cdot (x - x_0)$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \in (\varepsilon): -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0 + x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) + \eta\mu x_0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

Θεωρώ $g(x) = \sigma\upsilon\nu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu x - \frac{\pi}{2}$

Είναι: $g(0) = 0$ και $g(\pi) = 0$

$$g'(x) = -\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι: $g'(x) < 0$

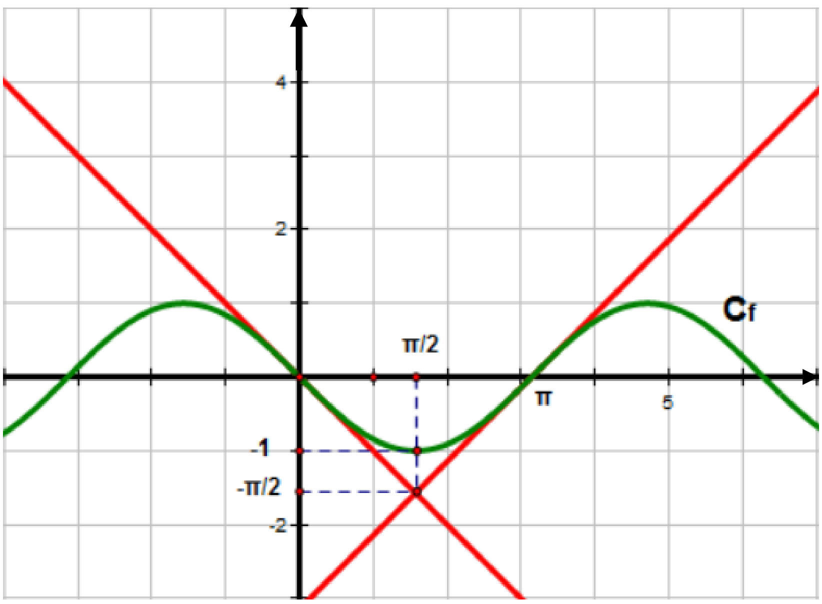
Για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι: $g'(x) > 0$

| $x$ | $0$ | | $\pi/2$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | | + | |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | |
| | T.M | | T.E | | T.M |

Η g συνεχής στο $[0, \pi]$ με $g_{max} = g(0) = g(\pi) = 0$

Άρα μοναδικές λύσεις x=0 και x=π. Συνεπώς οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι $(\varepsilon_1): y = -x$ και $(\varepsilon_2): y = x - \pi$

**Γ2.**



Τομή $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ : $A(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f''(x) = \eta\mu x > 0$ **για** $x \in (0, \pi)$ οπότε $f$ κυρτή $[0, \pi]$ επομένως η $C_f$ βρίσκεται πάνω από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξαίρεση τα σημεία επαφής αντίστοιχα.

$\text{Αρα}\ f(x) \geq -x \Leftrightarrow f(x) = x \geq 0$

για $x \in [0, \pi]$

$\text{και}\ f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow f(x) - \pi + x \geq 0$

$$E_1 = \int_0^{\pi/2} (f(x) + x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (f(x) + x)\,dx = \int_0^{\pi/2} (-\eta\mu x + x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi)\,dx =$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} -f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \eta\mu\, x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

Είναι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

**Γ3.** $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \left[\frac{1}{f(x) - x + \pi} \cdot \left(f(x) + x\right)\right] = +\infty$

Διότι $\lim\limits_{x \to \pi}(f(x) + x) = \pi$ και $f(x) - x + \pi > 0$ για $x \in (0, \pi)$

$\lim\limits_{x \to \pi} \frac{1}{f(x) - x + \pi} = +\infty$

**Γ4.** Είναι $f(x) > x - \pi, x \in [1, e]$ απο Γ2 (το ίσον ισχύει μόνο για $x = \pi > e$ )

οπότε $\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}, x \in [1, e]$ και

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e (1 - \frac{\pi}{x}) dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \left[x - \pi \ln x\right]_1^e = e - \pi - (1 - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi - 1$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, x \in [-1, 0) \\ e^x \eta\mu x, x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής για κάθε $x \in [-1, 0)$ ως σύνθεση συνεχών και στο $x \in [0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών .

Είναι για $x \neq 0$ $\lim_{x \to 0^-} \left(\sqrt[3]{x^4}\right) = 0$ $\lim_{x \to 0^+} \left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$ και $f(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$

επομένως $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ άρα η f συνεχής στο $x_0 = 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in [-1, 0)$ με

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' = \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)' = -\frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ αδύνατη καθώς $x \in [-1, 0)$

Η f παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f'(x) = \left(e^x \eta\mu x\right)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

Είναι για $x \in [0, \pi]$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow$$

$$e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Rightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \overset{\eta\mu x > 0}{\Rightarrow} \sigma\varphi x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Για $x \neq 0$ είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt[3]{x^4}-0}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^{\frac{4}{3}}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}\right)$$

$$=-\lim_{x\to 0^-}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=0$$

Για $x\neq 0$ είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x\cdot \eta\mu x-0}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=e^0\cdot 1=1$$

Επομένως

$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)\neq\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$ άρα δεν υπάρχει η παράγωγος στο $x_1=0$

Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f είναι τα εσωτερικά σημεία στα οποία μηδενίζετε η πρώτη παράγωγος και τα σημεία στα οποία δεν παραγωγίζεται άρα $x_0=\frac{3\pi}{4}, x_1=0$

**Δ2.** Η f παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ με $f'(x)=-\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}}<0$ άρα γνησίως φθίνουσα $[-1,0)$

Η f παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x)=\left(e^x\eta\mu x\right)'=e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ με

$$f'(x)=0\Rightarrow x_1=\frac{3\pi}{4}$$

Εστω $g(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \quad x\in[0,\pi]$ η οποία διατηρεί σταθερό πρόσημο με $g(0)=1>0$ και για $x>\frac{3\pi}{4}$ , $g(\pi)=-1<0$

Από πίνακα μονοτονίας έχουμε

| x | $-1$ | $0$ | $\frac{3\pi}{4}$ | π |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | + | - | |
| f(x) | ↘ | ↗ | ↘ | |
| | | Τ.ελ | Τ.μ | |

Επίσης η f παρουσιάζει τ.ακρότατα στα κλειστα άκρα των διαστημάτων

στο $x_0 = -1$ , $x_1 = 0, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \pi$ ,

με σύνολο τιμών $f([-1,\pi]) = \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

**Δ3.** Το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, της g, τον άξονα $yy'$ είναι την ευθεία $x = \pi$ ισούται :

$$E(\Omega) = \int_0^\pi |f(x) - g(x)| dx = \int_0^\pi \left(e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}\right) dx$$

Έστω $h(x) = e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}$ , $x \in [0,\pi]$

Η $h$ παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με

$$h'(x) = \left(e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}\right)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 5e^{5x} = e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right) - 5e^{5x}$$

Είναι για κάθε $x \in R$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \le 2 \Rightarrow e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right) \le 2e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right) - 5e^{5x} \le 2e^x - 5e^{5x} < 0$$

Επομένως η h είναι γν.φθίνουσα στο $[0,\pi]$

Για $0 \le x \le \pi \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(0) \ge h(x) \ge h(\pi) \Rightarrow h(x) \ge e^{5\pi} > 0$

$$E(\Omega) = \int_0^\pi |f(x) - g(x)| dx = \int_0^\pi \left|e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}\right| dx = \int_0^\pi \left(e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}\right) dx =$$

=

$$= \int_0^\pi \left(e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}\right) dx$$

**Δ4.**

$$16 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 16 \cdot f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot f(x) = 8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} + (4x - 3\pi)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f_{max} + \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} \Leftrightarrow f_{max} = f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} \ge f(x)$$

Επομένως

$$-\frac{(4x-3\pi)^2}{16} \geq 0 \Leftrightarrow (4x-3\pi)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (4x-3\pi)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-3\pi = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$,δεκτή