ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B, αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ της C_f, του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = e^x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $(f \circ g)(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$, με $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι ‘1-1’ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} \varphi(x) .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \ell n\lambda , & x \le 0 \\ \eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x , & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \quad , \text{ με } \lambda > 0 .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,\ 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha,\ f(\alpha))$, με $\alpha \le 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_o, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0,\ 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_o) = {x_o}^2 - (e+2)x_o + e - 1.$$

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to x_o} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_o)} + \text{ημ}\left(\frac{1}{x - x_o} \right) \right],$$

όπου x_o το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο**.**

Μονάδες 6

Δ3. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_o$ για $x \in (x_o, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ**.**

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_o) > f(\rho)\,(f'(k) + 1)$ για κάθε $k \in (\rho,\ 1)$**.**

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2020
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών *(σελ.76 σχολικού βιβλίου)*

Α2. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου (*σελ. 104)*
Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$$

Α3.
α. Ψευδής
β. Η συνάρτηση $f(x)=x^3$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ με $f'(0)=0$. Ενώ δηλαδή υπάρχει ένα σημείο μηδενισμού της παραγώγου η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
(Σελίδα 136 Σχολικού βιβλίου)

Α4.

α. **Λάθος**
β. **Σωστό**
γ. **Σωστό**
δ. **Σωστό**
ε. **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$$

Τελικά $D_{f\circ g}=(0,+\infty)$

Ο τύπος είναι: $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{e^x+2}{e^x-1}$ για κάθε $x>0$

Β2. Η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$(f\circ g)'(x)=\frac{e^x(e^x-1)-(e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{(e^x-1)^2}=-\frac{3e^x}{(e^x-1)^2}$, για κάθε $x>0$

Ισχύει $(fog)'(x)<0$ για κάθε $x>0$
Συνεπώς η fog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$
Άρα είναι και $1-1$ οπότε ορίζεται η $(f\circ g)^{-1}$.
Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $(f\circ g)^{-1}$, βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $(f\circ g)^{-1}$
Η $f\circ g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Άρα $(f\circ g)(A)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((f\circ g)(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+}(f\circ g)(x)\right)$ με

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{e}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1}\cdot(e^x+2)=3\cdot(+\infty)=+\infty$, διότι ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=0$ και $e^x>1$ για $x>0$.

Τελικά $D_{(f\circ g)^{-1}}=(f\circ g)\big(D_{f\circ g}\big)=(1,+\infty)$

Για τον τύπο της $(f\circ g)^{-1}$ θέτουμε $y=\frac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow(e^x-1)\cdot y=e^x+2\Leftrightarrow$

$e^x\cdot y-y=e^x+2\Leftrightarrow e^x\cdot y-e^x=y+2\ \Leftrightarrow$

$e^x(y-1)=y+2\overset{y>1}{\Longleftrightarrow}e^x=\dfrac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow$

$x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$ με $\psi>1$

$f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right),x>1$

Β3. Έστω $\varphi(x)=(fog)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right),x>1$
Για κάθε $x>1$ έχουμε:

$$\varphi'(x)=\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)'=\frac{x-1}{x+2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x+2)(x-1)}<0$$

Άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

Β4.
Είναι: $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]$
Θέτουμε $u=\frac{x+2}{x-1}$
Τότε $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x+2)\cdot\frac{1}{x-1}\right]=3\cdot(+\infty)=+\infty$
Συνεπώς αν $x\to1^+$ τότε $u\to+\infty$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.

Επιπλέον: $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

Θέτουμε $u=\frac{x+2}{x-1}$.

Τότε: $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}u\ =\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{u\to 1}\ln u\ =0$

ΘΕΜΑ Γ

Η δοσμένη συνάρτηση έχει τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda\,, x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, \quad 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$, ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow 1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow\lambda+\ln\lambda-1=0\ \ (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x+\ln x-1, x>0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, επομένως και $1-1$

Τελικά, $(1)\Leftrightarrow g(\lambda)=g(1)\overset{1-1}{\Longleftrightarrow}\lambda=1$

Γ2. Έχουμε $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\in\mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$ και ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(0,1)$, η οποία σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία ω, τέτοια ώστε $\lambda_\varepsilon=f'(0)=\varepsilon\varphi\omega\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=1\overset{\omega\in[0,\pi)}{\Longleftrightarrow}\omega=\frac{\pi}{4}$

Γ3. Η $f(x)=\frac{1}{1-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

Η $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0\,,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

Άρα είναι:

$f'(x)=0$ με $x\in\left(0\,,\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1$, αφού $\eta\mu x\neq 0$

(Αν $\eta\mu x=0$, τότε $\sigma\upsilon\nu x=0$. Άτοπο, αφού ισχύει $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$)

Άρα $\varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$, αφού $x \in \left(0\,,\frac{3\pi}{2}\right)$

Είναι και $f'(0) = 1 \neq 0$, οπότε το $x = 0$ δεν είναι κρίσιμο σημείο.

Επειδή τα σημεία $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$ είναι εσωτερικά σημεία του $A_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της f.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\big(a, f(a)\big)$ με $a \leq 0$ έχει εξίσωση

$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$ όπου $f(a) = \frac{1}{1-a}$ και $f'(a) = \frac{1}{(1-a)^2}$

$y - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2} \cdot (x - a)$

Για $y = 0$ δίνει $-\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-a)^2} \cdot x - \frac{a}{(1-a)^2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{(1-a)^2} \cdot x = \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} \overset{\cdot(1-a)}{\Longleftrightarrow}$

$\frac{1}{1-a} \cdot x = \frac{a}{1-a} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-a} \cdot x = \frac{2a-1}{1-a} \Leftrightarrow x = 2a - 1$

Άρα η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2a - 1{,}0)$

Κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ η τετμημένη του B είναι $x_B(t) = 2a(t) - 1$

οπότε $x'_B(t) = 2a'(t) \Leftrightarrow x'_B(t) = -2\frac{a(t)}{3}$

Για $t = t_0$ δίνει $x'_B(t_0) = -\frac{2a(t_0)}{3} \Leftrightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3}$, αφού $a(t_0) = -2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $f'(x) = e^x + 2x - e$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με:

$f''(x) = e^x + 2 > 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ύπαρξη ρίζας για την $\boldsymbol{f'(x) = 0}$:

[α' τρόπος]

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0{,}1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0{,}1)$ με $f(0) = f(1) = 0$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0{,}1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ $\;(\mathbf{1})$

[β' τρόπος]

Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της είναι το

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\,, \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right) = \mathbb{R}$,

όπου

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + 2x - e) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x + 2x - e) = +\infty$

Επομένως το $y=0$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f' οπότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$ $(\mathbf{1})$.
Είναι: $f'(0)=1-e<0$ και $f'(1)=2>0$.
Άρα: $f'(0)<f'(x_0)<f'(1) \Leftrightarrow 0<x_0<1$, γιατί f' γνησίως αύξουσα.

[γ' τρόπος]
Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ με
$f'(0)=1-e<0$ και $f'(1)=2>0$. Δηλαδή ισχύει: $f'(0)\cdot f'(1)<0$
Συνεπώς, από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε: $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$ $(\mathbf{1})$.

Μοναδικότητα ρίζας:
Το x_0 είναι μοναδικό καθώς η συνάρτηση f' είναι γνησίως μονότονη.

Έτσι για $x<x_0$ έχουμε: $f'(x)<f'(x_0)=0$ και για $x>x_0$ έχουμε: $f'(x)>f'(x_0)=0$.
Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων:

x	0	x_0	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=x_0$ το $y=f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1$ **(2).**

Όμως ισχύει από την (1): $e^{x_0}=e-2x_0$. Άρα η (2) γράφεται:
$f(x_0)=e-2x_0+x_0^2-ex_0-1 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$.

Δ2. *[α' τρόπος]*
Ισχύει από το ερώτημα Δ1 ότι: $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=x_0$. Οπότε $f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0$ κοντά στο x_0
με $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$. Άρα: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$
Είναι: $\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\geq -1$ κοντά στο x_0, οπότε: $\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\geq\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1$ κοντά στο x_0. Επειδή: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\right]=+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$, γιατί αν ισχύει: $g(x)\geq f(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$.

[β' τρόπος]

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq f(x_0)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_0$
Άρα, για $x\neq x_0$, ισχύει $f(x)>f(x_0)$ (1)

Έστω $g(x)=\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right), x\neq x_0$
Για $x\neq x_0$ ισχύει:
$g(x)=\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\cdot\left[1+\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]$
και $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=f(x_0)-f(x_0)=0$
Επειδή κοντά στο x_0 ισχύει :
$f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0$, είναι:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$$

- Για $x\neq x_0$ ισχύει:

$\left|\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|=|f(x)-f(x_0)|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|\leq|f(x)-f(x_0)|=$
$=f(x)-f(x_0)$ (από σχέση (1))

Άρα $-\left(f(x)-f(x_0)\right)\leq\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\leq f(x)-f(x_0)$
και με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής ισχύει:
$$\lim_{x\to x_0}\left[\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{(x-x_0)}\right)\right]=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\left[1+\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{(x-x_0)}\right)\right]=1$$
Τελικά $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$

Δ3. Η ζητούμενη εξίσωση γράφεται: $f(x)+x=x_o\Leftrightarrow f(x)+x-x_o=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x)=f(x)+x-x_o,\ x\in[x_0,1]$ που σημαίνει ότι η ζητούμενη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $h(x)=0$.
Η h είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ και $h(x_o)\cdot\ h(1)<0$, αφού:

- $h(x_o)=f(x_o)<f(1)=0$
- $h(1)=f(1)+1-x_o=1-x_o>0$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(x_o,1)$ ώστε να ισχύει $h(\rho)=0$.
Μοναδικότητα ρίζας:
[α' τρόπος]
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0,1)$ με $h'(x)=f'(x)+1>0$, για κάθε $x\in(x_0,1)$ από το ερώτημα Δ1. Επομένως, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,1]$ ως συνεχής στο διάστημα αυτό, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

[β' τρόπος]
Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\xi\in(x_o,1)$ με $\xi\neq\rho$ ώστε να ισχύει $h(\xi)=0$.
Υποθέτουμε $\rho<\xi$ και έχουμε:

- h συνεχής στο $[\rho,\xi]$.
- h παρ/μη στο (ρ,ξ) με $h'(x)=f'(x)+1$
- $h(\rho)=h(\xi)=0$

Από το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\rho, \xi]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mu \in (\rho, \xi)$ ώστε $h'(\mu) = 0 \Leftrightarrow f'(\mu) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\mu) = -1 < 0$, που είναι άτοπο, εφόσον $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_o, 1)$.

Δ4. Από το ερώτημα Δ3 είναι: $f(\rho) = x_0 - \rho < 0 \quad (\mathbf{3})$, αφού $\rho \in (x_0, 1)$, οπότε η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x_0) > f(\rho) \cdot (f'(\kappa) + 1) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0)}{f(\rho)} < f'(\kappa) + 1 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f(\rho)} - 1 < f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa), \quad (\mathbf{4})$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ), επομένως από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

Επομένως από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε: $f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \xi < \kappa$, λόγω της μονοτονίας της f' που είναι γνησίως αύξουσα, το οποίο ισχύει, γιατί $\kappa \in (\rho, 1)$ και $x_0 < \xi < \rho < \kappa < 1$.