ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in A$.

γ) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, M, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \text{συν}x, & 0<x\le \dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$, με $\alpha<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ell n x = \frac{1}{x} \qquad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο (1, e).

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = \left(\ell n x_0\right) \cdot (x+1) - \ell n x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \ \ x \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \ \ x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f(x)\right)$ και $B\left(x, \varphi(x)\right)$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων Α και Β γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Σχολικό Βιβλίο Σελ.135

A_2. Σχολικό Βιβλίο Σελ.51

A_3. Σχολικό Βιβλίο Σελ.23

A_4. **α) Σ** **β) Λ** **γ) Σ** **δ) Σ** **ε) Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε $u = x+1$, $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$ άρα $x = u-1$,

$f(u) = u \cdot e^{-(u-1)} \Leftrightarrow f(u) = u \cdot e^{1-u}, u \in \mathbb{R}$ επομένως $f(x) = x \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$

Β2. Η f συνεχής ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \left(x \cdot e^{1-x}\right)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x) \cdot e^{1-x}$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x) \cdot e^{1-x} > 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (1-x) \cdot e^{1-x} < 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x) \cdot e^{1-x} = 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Η f εμφανίζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		-
f	$\nearrow$	ΟΜ f(1)=1	$\searrow$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων

$$f''(x)=\left(e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}\right)'=e^{1-x}(1-x)'-\left[x'e^{1-x}+xe^{1-x}(1-x)'\right]=$$

$$=-e^{1-x}-\left(e^{1-x}-xe^{1-x}\right)=-e^{1-x}-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-2)e^{1-x}$$

$$f''(x)>0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}x-2>0\Leftrightarrow x>2$$

$$f''(x)<0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}x-2<0\Leftrightarrow x<2$$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα η f κυρτή στο $[2,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,2]$.

Η f εμφανίζει σημείο καμπής στο $x_1=2$ το σημείο καμπής είναι το $\left(2,2e^{-1}\right)$.

$f(x)=x\cdot e^{1-x}$ με $A_f=\mathbb{R}$.

Η f συνεχής $A_f=\mathbb{R}$ επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe}{e^x}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$$

Επομένως η ευθεία y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f καθώς το $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e}{e^x}=+\infty$$

Επομένως η f δεν έχει πλάγια η οριζόντια ασύμπτωτη καθώς το $x\to-\infty$

B4.i) $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ $f \nearrow$

$\Delta_2 = (1, +\infty)$ $f \searrow$

f συνεχής στο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = \mathbb{R}$

$f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$ αφού

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot e}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e \cdot \frac{1}{e^x} \right) = -\infty$$

($\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ & $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$)

$f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \right) = (0, 1)$

Το όριο έχει δειχθεί σε προηγούμενο ερώτημα.

Άρα $f(\Delta) = (-\infty, 1] \cup (0, 1) = (-\infty, 1]$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		-
f	$\nearrow$	ΟΜ f(1)=1	$\searrow$

Από το σύνολο τιμών της f πρκύπτει ότι:

Αν $\lambda \leq 0$ η (ε) :f(x)=λ έχει μία ρίζα

Αν $0 < \lambda < 1$ η (ε) :f(x)=λ έχει δυο ρίζες

Αν $\lambda = 1$ η (ε) :f(x)=λ έχει μια ρίζα την χ=1

Αν $\lambda > 1$ η (ε) :f(x)=λ έχει είναι αδύνατη

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ.1.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1 & ,\ x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x & ,\ 0<x\le \dfrac{3\pi}{2}\end{cases}\qquad \alpha<-3$$

$f\left(0\right)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sigma\upsilon\nu x\right)=1$

- Η f συνεχής στο $x_0=0$
- Η f συνεχής στο $\left(-\infty,0\right)$ ως πολυωνυμική και συνεχής στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.

Άρα συνεχής στο $\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha x^2-3x-1\right)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Γ.2.

i) Η f συνεχής στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{2}=0$

$f\left(0\right)=1$

Συνεπώς δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ii) Αν $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ τότε $f'(x) = -ημx$

Έστω $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -ημx = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \Leftrightarrow x = κπ\ , κ \in \mathbb{Z}$

$0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < κπ < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < κ < \frac{3}{2}$ άρα $κ = 1$

Για $κ = 1$: $x = 1 \cdot \pi = \pi$

Άρα υπάρχει μοναδικό $ξ = \pi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(ξ) = 0$

Γ.3. Έστω σημείο $A(x, f(x))$ με $x < 0$ τέτοιο ώστε $f'(x) = 0$

Για $x < 0$ η $f'(x) = 3αx^2 - 6x - 1$

Άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3αx^2 - 6x - 1 = 0$

$Δ = (-6)^2 - 4 \cdot (3α) \cdot (-1) = 36 + 12α$

Όμως $α < -3 \Leftrightarrow 12α < -36 \Leftrightarrow 12 + 36 < 0 \Leftrightarrow Δ < 0$

Άρα $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x < 0$, άρα δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτόμενη της C_f να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ.4. Για $x < 0$: $f'(x) = 3αx^2 - 6x - 1 < 0$ διότι $Δ < 0$ και $3α < 0$

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$: $f'(x) = -ημx$

- Για $x \in (0, \pi)$ έχουμε $ημx > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- Για $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε $ημx < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$3\alpha x^2-6x-1$		$-$					
$-\eta\mu x$				$-$	0	$+$	
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
					Τ.ΕΛ.		Τ.ΜΕΓ.

Η f συνεχής στο A_f

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha x^3\right)=+\infty$ (διότι $\alpha<0$)

$f(\pi)=\sigma\upsilon\nu\pi=-1$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

Για το σύνολο τιμών της f:

$f\left((-\infty,\pi]\right)\overset{\searrow}{=}\left[f(\pi),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$

$f\left(\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right)\overset{\nearrow}{=}\left(f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]=(-1,0]$

Άρα $f(A)=[-1,+\infty)$ συνεπώς $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in A_f$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ.1. $\ln x=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x\ln x-1=0$

$t(x)=x\ln x-1,\ x\in[1,e]$

- t συνεχής στο $[1,e]$
- $\left.\begin{array}{l} t(1)=-1<0 \\ t(e)=e\ln e-1=e-1 \end{array}\right\} t(1)\cdot t(e)<0$

Από το Θ.Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $t(x_0)=0$

$t'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1>0$ για κάθε $x\in(1,e)$

Άρα $t \nearrow$ στο $(1,e)$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=(\ln x_0)\cdot(x+1)-\ln x-1$

Δ.2. $f'(x)=\ln x_0-\dfrac{1}{x}\overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{=}\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-x_0}{x_0\cdot x}$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-x_0}{x_0\cdot x}\geq 0 \overset{x_0\cdot x>0}{\Leftrightarrow} x\geq x_0$

x	0		x_0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	ΟΛ.ΕΛ.	$\nearrow$	

Η $f(x)$ παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο το

$$\begin{aligned}f(x_0)&=(\ln x_0)\cdot(x_0+1)-\ln x_0-1=\\&=x_0\cdot\ln x_0+\ln x_0-\ln x_0-1=\\&=x_0\cdot\ln x_0-1=x_0\cdot\frac{1}{x_0}-1=1-1=0\end{aligned}$$

Δ.3.

- Για $x>0$

$$\begin{aligned}g(x)=h(x)&\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln\left(x\cdot e^{-x}\right)=\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln x-x\ln e=(x+1)\ln x_0-(x+1)\ln e\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\ln x_0-(x+1)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \ln x\cancel{-x}=(x+1)\ln x_0\cancel{-x}-1\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-\ln x-1=0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow f(x)=0\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το ερώτημα $Δ_2$ η f παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο

Άρα $f(x)\geq f(x_0)=0$ και το "$=$" ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το $x=x_0$

Άρα $g(x_0)=h(x_0)$

$g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\frac{x_0}{e}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}(\ln x_0-\ln e)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}(\ln x_0-1)$$

Θα δείξουμε ότι $g'(x_0)=h'(x_0)$

$$g'(x_0)=h'(x_0)\Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(\ln x_0-1)\Leftrightarrow$$

$$\overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{\Leftrightarrow}\ e^{-x_0}(1-x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\left(\frac{1}{x_0}-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-x_0}(1-x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\left(\frac{1-x_0}{x_0}\right)\Leftrightarrow$$

$$\overset{x_0\neq 1}{\Leftrightarrow}\ e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\left(\frac{1}{x_0}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0}\cdot\left(\frac{x_0}{e}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_0}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-x_0}=\frac{{x_0}^{x_0}}{e^{x_0}}\cdot\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ {x_0}^{x_0}=e\Leftrightarrow \ln{x_0}^{x_0}=\ln e\Leftrightarrow x_0\ln x_0=1\Leftrightarrow\ \ln x_0=\frac{1}{x_0}$$

Ισχύει από το Δ_1

- Για $x\le 0$ η εξίσωση $g(x)=h(x)$ είναι αδύνατη, αφού

  $g(x)=x\cdot e^{-x}\le 0$ και $h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}>0$ αφού $x_0\in(1,e)$

Δ.4. $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)>\varphi(x)$

$A(x,f(x))\quad B(x,\varphi(x))\quad x>0$

$$(AB)=d(A,B)=\sqrt{(x-x)^2+(\varphi(x)-f(x))^2}=\sqrt{(\varphi(x)-f(x))^2}=$$

$$=|\varphi(x)-f(x)|=f(x)-\varphi(x)\text{ , αφού } f(x)>\varphi(x)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$S(x)=f(x)-\varphi(x),\ x\in(0,+\infty)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) Αν η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε:

   Η $S(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0,

   $S(x) \geq S(x_0)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

   αφού παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$.

   Από το Θ.Fermat: $S'(x_0) = 0$

   $S'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$

   $S'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \overset{f'(x_0)=0}{\underset{\Delta_2}{\Leftrightarrow}} \varphi'(x_0) = 0$

   Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της $\varphi(x)$.

2) Αν η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της $\varphi(x)$.

Σε κάθε περίπτωση, το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ