

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΥΚΛΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΕ 2002
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Οι βαθμοί των 11 μαθητών μιας τάξης ενός Τ.Ε.Ε. σε ένα μάθημα είναι:
12, 12, 9, 15, 12, 16, 17, 7, 19, 18, 17.

Για τα δεδομένα αυτά:

α. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

ε. Να βρείτε τη διακύμανση.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln 2 .$$

α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$ και $f'(1)$.

Μονάδες 5

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 - 1, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

με $f(x) = \lambda x^3 - x$ όπου λ πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

α. Να βρείτε την τιμή του λ .

Μονάδες 10

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

x_i	v_i	$v_i x_i$
7	1	7
9	1	9
12	3	36
15	1	15
16	1	16
17	2	34
18	1	18
19	1	19
Σύνολο	11	154

β. Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι $\bar{x} = \frac{154}{11} = 14$

γ. Η επικρατούσα τιμή είναι το 12 αφού έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα: 3

δ. Θέτοντας σε αύξουσα σειρά τα δεδομένα έχουμε:
7 9 12 12 12 15 16 17 17 18 19
Η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, άρα: $\delta = 15$

ε. Έχουμε:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{11} [(7-14)^2 + (9-14)^2 + 3(12-14)^2 + (15-14)^2 + (16-14)^2 + \\ &\quad + 2(17-14)^2 + (18-14)^2 + (19-14)^2] = \\ &= \frac{1}{11} (7^2 + 5^2 + 3 \cdot 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 4^2 + 5^2) = \\ &= \frac{1}{11} (49 + 25 + 12 + 1 + 4 + 18 + 16 + 25) = \frac{150}{11} \approx 13,6 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2ο

- α. Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln 2 \right)' = \\ &= \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{1}{2}(x^2)' + (\ln 2)' = \\ &= \frac{1}{3}3x^2 - \frac{1}{2}2x + 0 = x^2 - x \end{aligned}$$

β. $f'(0) = 0^2 - 0 = 0$
 $f'(1) = 1^2 - 1 = 0$

γ. $f'(x) = x \cdot (x-1)$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1$
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x > 1$
 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Έτσι προκύπτει ο πίνακας προσήμων της f' :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\lambda x^2 - 1) = \lambda - 1$

β. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3$

- γ. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, αν και μόνον αν

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

οπότε: $3 = \lambda - 1 = \lambda - 1$ ή
 $\lambda - 1 = 3.$
 Άρα $\lambda = 4.$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή είναι: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (\lambda x^3 - x) = 1$

οπότε $\lambda - 1 = 1$.

Άρα $\lambda = 2$.

β. Για την τιμή $\lambda = 2$ έχουμε $f(x) = 2x^3 - x$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = (2x^3 - x)' = 6x^2 - 1$.

γ. Είναι:
$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (\lambda x^3 - x) dx = \lambda \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 x dx =$$
$$= \lambda \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \lambda \left(\frac{1}{4} - 0 \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2}.$$

Επομένως η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f(x) dx$ για $\lambda = 2$ είναι:

$$\frac{2}{4} - \frac{1}{2} = 0.$$



ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές: 5, 3, 3ω, 3, 2ω, 3, 3ω, ω με $\omega > 0$

α) Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{x} = 4$, να αποδείξετε ότι $\omega = 2$.

Μονάδες 7

β) Για $\omega = 2$ να βρείτε:

- i) Το εύρος των τιμών.
- ii) Την επικρατούσα τιμή.
- iii) Την τυπική απόκλιση.

Μονάδες 5

Μονάδες 5

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \lambda - 2, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το $f(0)$ και το $f(2)$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε το $f(1)$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$

Μονάδες 14

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t, \text{ όπου } 0 \leq t \leq 10$$

α) Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t=0$;

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

$$\alpha) \bar{x}=4 \Leftrightarrow \frac{5+3+3\omega+3+2\omega+3+3\omega+\omega}{8}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9\omega+14}{8}=4 \Leftrightarrow 9\omega+14=32 \Leftrightarrow 9\omega=18 \Leftrightarrow \omega=2.$$

β)

i) Για $\omega=2$ οι τιμές της μεταβλητής γίνονται: 5, 3, 6, 3, 4, 3, 6, 2.

Η μεγαλύτερη τιμή είναι 6 ενώ η μικρότερη 2. Έτσι προκύπτει ότι το εύρος είναι 4.

ii) Από τον πίνακα συχνοτήτων:

x_i	2	3	4	5	6
v_i	1	3	1	1	2

προκύπτει ότι η επικρατούσα τιμή είναι η 3.

$$\text{iii) } S = \sqrt{\frac{(2-4)^2 + 3(3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + 2(6-4)^2}{8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+3+0+1+8}{8}} = \sqrt{\frac{16}{8}} = \sqrt{2}.$$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι:

$$\bullet \quad f(0) = \frac{0^2 + 6 \cdot 0 - 7}{0 - 1} = \frac{-7}{-1} = 7.$$

$$\bullet \quad f(2) = \frac{2^2 + 6 \cdot 2 - 7}{2 - 1} = \frac{4 + 12 - 7}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+7)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+7) = 8.$$

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\text{Δηλαδή } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \lambda - 2 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x+7) = \lambda - 2 \quad \text{ή} \quad 8 = \lambda - 2. \quad \text{Άρα } \lambda = 10.$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι: $f(1)=\ln 1+1-1=0$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη 2-φορές για κάθε $x>0$ με

- $f'(x)=(\ln x+x-1)'=(\ln x)'+x'-1'=\frac{1}{x}+1$ και

- $f''(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'+1'=\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1'x-1x'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}.$

γ) Επειδή $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ για κάθε $x>0$ προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>0$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Τη χρονική στιγμή $t=0$ το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος

$$h=f(0)=-3 \cdot 0^2+30 \cdot 0=0\text{m}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής τη χρονική στιγμή t είναι:

$$f'(t)=(-3t^2+30t)'=-6t+30.$$

γ) Προκειμένου να βρούμε τα διαστήματα ανόδου και καθόδου του αεροπλάνου αρκεί να μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 10]$.

- $H f'(t) > 0 \Leftrightarrow -6t+30 > 0 \Leftrightarrow 6t < 30 \Leftrightarrow t < 5$

Επομένως στο διάστημα $[0, 5]$ το αεροπλάνο ανεβαίνει.

- $H f'(t) < 0 \Leftrightarrow -6t+30 < 0 \Leftrightarrow 6t > 30 \Leftrightarrow t > 5.$

Επομένως στο διάστημα $[5, 10]$ το αεροπλάνο κατεβαίνει.

δ) Σύμφωνα με το ερώτημα (γ) έχουμε τον ακόλουθο πίνακα

t	0	5	10
$f'(t)$		+	-
$f(t)$		γ. αύξουσα	γ. φθίνουσα

Επομένως για την τιμή $t=5$ η συνάρτηση $f(t)$ παρουσιάζει μέγιστο,
 $f(5)=-3 \cdot 5^2+30 \cdot 5=-3 \cdot 25+150=-75+150=75.$

Άρα τη χρονική στιγμή $t=5$ sec το Αεροπλάνο βρίσκεται σε μέγιστο ύψος που είναι $f(5)=75$ μέτρα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΥΚΛΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΕ 2004**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ 1ο**

Εξετάσαμε δείγμα 25 οικογενειών μιας πόλης, ως προς τον αριθμό των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα (%) $f_i \%$
0	4		
1			
2	5		
3	4		
4	3		
5	2		
Αθροίσματα			

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

δ) Τι ποσοτό οικογενειών έχει τρία παιδιά;

Μονάδες 5

ε) Πόσες οικογένειες έχουν μέχρι και δύο παιδιά;

Μονάδες 5**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-18}{\sqrt{x}-3}, & x > 9 \\ \lambda x + 3, & x \leq 9 \end{cases}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x)$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x)$.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 9$.

Μονάδες 8**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + \beta$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Αν $f'(1) = 0$ και $f(2) = 5$, να βρείτε τα a και β .

Μονάδες 10

γ) Για τις τιμές των a και β που βρήκατε στο ερώτημα (β), να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x.$$

Μονάδες 5

β) Για ποιά τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α)

Αριθμός παιδιών	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα (%) f_i
0	4	4	16
1	7	11	28
2	5	16	20
3	4	20	16
4	3	23	12
5	2	25	8
Αθροίσματα	25		100

β) Η επικρατούσα τιμή είναι 1 αφού έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

γ) Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 25 διάμεσος είναι η 13η παρατήρηση δηλ. η 2.

δ) Τρία παιδιά έχουν 16% των οικογενειών.

ε) Μέχρι και δύο παιδιά έχουν $4 + 7 + 5 = 16$ οικογένειες.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2x-18}{\sqrt{3}-3} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{(2x-18)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x})^2 - 3^2} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9^+} 2 \cdot (\sqrt{x}+3) = \\ &= 2(\sqrt{9}+9) = 2(3+9) = 24\end{aligned}$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^-} (\lambda x + 3) = 9\lambda + 3$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 9$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = f(9)$$

δηλαδή $9\lambda + 3 = 12 = 9\lambda + 3$ ή $9\lambda + 3 = 12$ ή $9\lambda = 9$.

Άρα $\lambda = 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$$f'(x) = (2x^3 - 9x^2 + ax + \beta)' = 6x^2 - 18x + a.$$

β)

- Επειδή $f'(1) = 0$, έχουμε

$$6 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + a = 0 \quad \text{ή} \quad 6 - 18 + a = 0 \quad \text{ή} \quad a = 18 - 6.$$

Άρα $a = 12$.

Για την τιμή $a = 12$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + \beta$$

- Επειδή τώρα είναι $f(2) = 5$, έχουμε

$$2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + \beta = 5 \quad \text{ή} \quad 16 - 36 + 24 + \beta = 5 \quad \text{ή} \quad \beta = 5 - 16 + 36 - 24$$

Άρα $\beta = 1$.

γ) Για τις τιμές $a = 12$ και $\beta = 1$ ο τύπος της $f(x)$ γράφεται

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 12x + 1.$$

Οπότε

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2).$$

Από την εξίσωση $f'(x) = 0$ έχουμε $6(x - 1)(x - 2) = 0$

Άρα $x = 1$ ή $x = 2$

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Επομένως η f είναι

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αφού το άθροισμα του μήκους και του πλάτους του οικοπέδου είναι 200 μέτρα και με δεδομένο ότι το μήκος είναι x μέτρα, προκύπτει ότι το πλάτος θα ήταν $(200 - x)$ μέτρα. Επομένως, το εμβαδόν θα είναι:

$$E(x) = x(200 - x) = -x^2 + 200x.$$

β) Παραγωγίζοντας την $E(x)$ έχουμε:

$$E'(x) = -2x + 200 = -2(x - 100), \quad 0 < x < 200.$$

Είναι:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 100$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 100 < 200$$

Η $E(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,100]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[100,200)$. Άρα γίνεται μέγιστη όταν $x = 100$ μέτρα.

γ) Η μέγιστη τιμή του $E(x)$ είναι:

$$E(100) = -100^2 + 200 \cdot 100 = 20000 - 10000 = 10000 \text{ τ.μ.}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΥΚΛΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΕ 2005

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Ερωτήθηκαν 50 μαθητές ενός σχολείου για τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν στις διακοπές. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	$x_i v_i$
0		11	
1		25	
2		42	
3		47	
4		50	
Αθροίσματα			

- α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 8

- β) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 8

- γ) Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

- δ) Να βρείτε το εύρος των τιμών.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < -1 \\ \kappa x + \mu, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 5 + \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

όπου κ, μ πραγματικοί αριθμοί.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 4

δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 4

ε) Να βρείτε τα κ και μ , ώστε να υπάρχουν ταυτόχρονα τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η πρώτη παράγωγος έχει τύπο:
 $f'(x) = x^2 - 2x$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

Μονάδες 4

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε την $f'(x)$

Μονάδες 6

δ) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακρότατων;

Μονάδες 4

ε) Αν $f(0) = 2005$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \leq t \leq 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

- α) Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ($t = 0$);
Μονάδες 5
- β) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.
Μονάδες 8
- γ) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.
Μονάδες 7
- δ) Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;
Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α)

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	$x_i v_i$
0	11	11	0
1	14	25	14
2	17	42	34
3	5	47	15
4	3	50	12
Αθροίσματα	50		75

β) Η μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \frac{1}{50} \sum_{i=0}^4 x_i v_i = \frac{75}{50} = 1,5$.

γ) Η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα της 25^{ης} και της 26^{ης} παρατήρησης.

$$\text{Έτσι } \delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5.$$

δ) Το εύρος είναι $4 - 0 = 4$.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1) = 0$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\kappa x + \mu) = -\kappa + \mu$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\kappa x + \mu) = \kappa + \mu$.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2x + 5 + \ln x) = 1 + 2 + 5 = 8$.

ε) Τα όρια $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ υπάρχουν αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \text{ δηλαδή}$$

$$0 = -\kappa + \mu \Leftrightarrow \kappa - \mu = 0 \quad (1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ δηλαδή } \kappa + \mu = 8 \quad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \kappa - \mu = 0 \\ \kappa + \mu = 8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2\kappa = 8 \\ \kappa - \mu = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \kappa = 4 \\ \mu = 4 \end{array} \right\}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Στον τύπο $f'(x) = x^2 - 2x$ θέτοντας $x = 0$, $x = 2$ παίρνουμε αντίστοιχα

$$f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$f'(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$$

β) $f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$				

Προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

γ) $f'(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

δ) Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 0$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 2$.

ε) Η παράγουσα της $f'(x) = x^2 - 2x$ είναι $\frac{x^3}{3} - x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Οπότε } f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + c.$$

$$\text{Όμως } f(0) = 2005. \text{ Άρα } \frac{0^3}{3} - 0^2 + c = 2005 \Leftrightarrow c = 2005.$$

$$\text{Έτσι προκύπτει } f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2005, x \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Ο αριθμός των δελφινιών που υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$N(0) = 2 \cdot 0^3 - 0^2 + 5 \cdot 0 + 1000 = 1000.$$

β) Ο ρυθμός αύξησης των δελφινιών είναι:

$$N'(t) = (2t^3 - t^2 + 5t + 1000)' = 6t^2 - 2t + 5.$$

γ) Ο ρυθμός αύξησης των δελφινιών το δεύτερο έτος είναι:

$$N'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 6 \cdot 4 - 4 + 5 = 24 - 4 + 5 = 25.$$

δ) Μετά από δέκα (10) χρόνια θα υπάρχουν:

$$\begin{aligned} N(10) &= 2 \cdot 10^3 - 10^2 + 5 \cdot 10 + 1000 = \\ &= 2 \cdot 1000 - 100 + 50 + 1000 = \\ &= 2000 - 50 + 1000 = 2950 \text{ δελφίνια.} \end{aligned}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΕΕ
2006

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται 5 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X :

$$16, 14, 22, 18, 20 + \alpha, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) των παρατηρήσεων αυτών είναι 20% και η τυπική απόκλισή τους (s) είναι 4, τότε:

α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 20$.

Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 10

γ) Για την τιμή του α που υπολογίσατε στο ερώτημα β, να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 5

δ) Είναι το δείγμα ομοιογενές ή όχι και γιατί.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 4x^3 - 12x + 2006, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρεθεί η παράγουσα της f .

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

γ) Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί και συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \alpha, & \text{αν } x > 2 \\ 4, & \text{αν } x = 2 \\ \alpha x + \beta, & \text{αν } x < 2 \end{cases}.$$

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 8

δ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα γ, να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2} x(50 - x), \quad 0 < x < 50.$$

Μονάδες 8

β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 12

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{s}{CV}$. Οπότε $\bar{x} = \frac{4}{0,2} = 20$.

β) $\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{16 + 14 + 22 + 18 + 20 + \alpha}{5} = 20 \Leftrightarrow \frac{90 + \alpha}{5} = 20 \Leftrightarrow \alpha = 10$.

γ) Για $\alpha = 10$, οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι:

14, 16, 18, 22, 30.

Επειδή το πλήθος τους είναι 5, διάμεσος είναι η 3η παρατήρηση. Έτσι $\delta = 18$.

δ) Ο συντελεστής μεταβλητότητας $CV = 20\%$ είναι μεγαλύτερος από 10%, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Η παράγουσα της $f(x) = 4x^3 - 12x + 2006$ είναι

$$F(x) = x^4 - 6x^2 + 2006x + C \quad \text{με } C \in \mathbb{R}.$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 12x^2 - 12$.

γ) Εξισώνουμε την $f'(x)$ με το μηδέν και βρίσκουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 12(x - 1)(x + 1) = 0$$

οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f		↗	↘	↗	

Επομένως η f είναι

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \alpha \right] = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \\ &= \alpha \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4\alpha.\end{aligned}$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\alpha x + \beta) = 2\alpha + \beta$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$.

Δηλαδή $2\alpha + \beta = 4\alpha = 4$ οπότε

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ 4\alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

δ) Για τις τιμές $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ ο τύπος της f γράφεται:

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot 1 & \text{αν } x > 2 \\ 4 & \text{αν } x = 2 \\ x + 2 & \text{αν } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} \cdot 1 & \text{αν } x > 2 \\ 4 & \text{αν } x = 2 \\ x + 2 & \text{αν } x < 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (x + 2) & \text{αν } x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \\ 4 & \text{αν } x = 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Οπότε

$$f(0) = (0 + 2) = 2 \text{ και}$$

$$f(3) = (3 + 2) = 5.$$

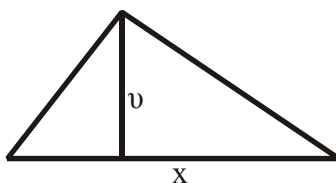
ΘΕΜΑ 4ο

α) Επειδή το άθροισμα της βάσης x και του αντίστοιχου ύψους u είναι σταθερό και ίσο με 50cm έχουμε:

$$u + x = 50.$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E = \frac{1}{2}x \cdot u = \frac{1}{2}x \cdot (50 - x) \quad \text{με} \quad 0 < x < 50.$$



β) Είναι $E'(x) = \left[\frac{1}{2}(50x - x^2) \right]' = \frac{1}{2}(50 - 2x) = 25 - x.$

Λύνουμε την εξίσωση: $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 25 - x = 0$ και βρίσκουμε $x = 25$ cm.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών.

x	0	25	50
E'		+	-
E		↗	↘

Η τιμή λοιπόν για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ παρουσιάζει μέγιστο είναι η $x = 25$.

γ) Για την τιμή $x = 25$ η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι:

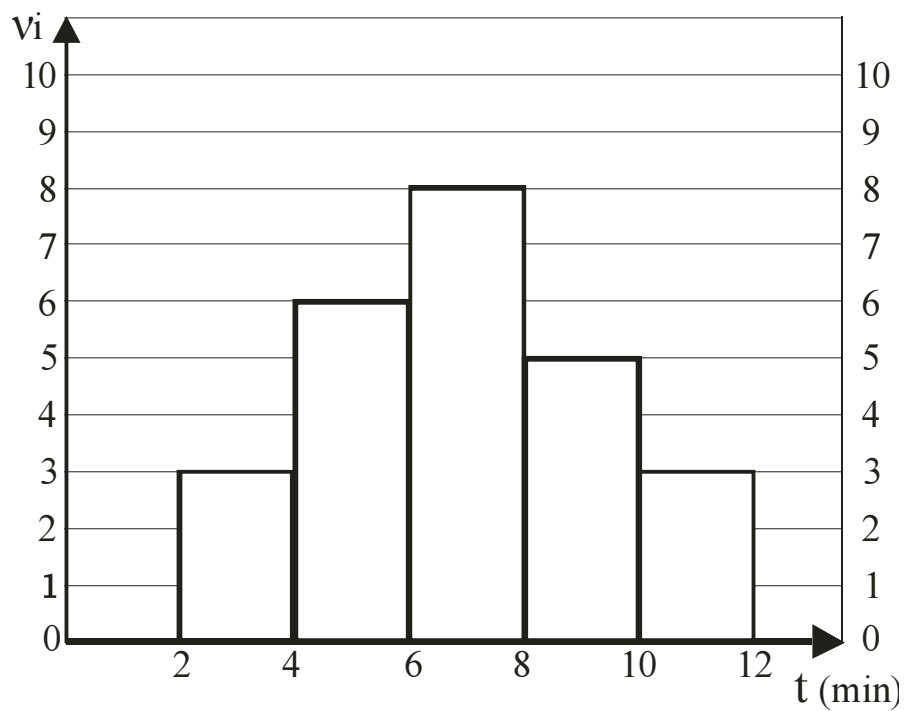
$$E(25) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (50 - 25) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 25 = \frac{625}{2} \text{ cm}^2.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β' ΚΥΚΛΟΥ ΤΕΕ
2007

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Οι χρόνοι καθυστερήσεων που παρατηρήθηκαν σε 25 δρομολόγια ενός οργανισμού σιδηροδρόμων δίνονται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων:



- α. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με τη βοήθεια του παραπάνω ιστογράμματος συχνοτήτων.

Διάστημα	Συχνότητα v_i	Μέσο διαστήματος K_i	$v_i K_i$	Σχετική συχνότητα α $f_i\%$	Σχετική αθροιστική συχνότητα %
[2, 4)					
[4, 6)					
[6, 8)					
[8, 10)					
[10,12)					
Αθροίσματα					

Μονάδες 10

- β. Να βρείτε το μέσο χρόνο καθυστερήσεων των δρομολογίων.

Μονάδες 5

- γ. Πόσα δρομολόγια είχαν καθυστέρηση τουλάχιστον 6 λεπτά;

Μονάδες 5

- δ. Ποιο είναι το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} & \text{αν } x < 0 \\ -3 + \beta & \text{αν } x = 0 \\ e^x - \alpha & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Μονάδες 8

- β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Μονάδες 4

γ. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Μονάδες 8

δ. Για την τιμή $\alpha=4$ να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x=0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + kx + \lambda$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$ και το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση,

α. να δείξετε ότι $k=-2$ και $\lambda=1$.

Μονάδες 12

β. να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f .

Μονάδες 5

γ. να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $f(x) + f'(x) + f''(x) > 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 10 \ln x - 5x^2$, $x > 0$.

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της f .

Μονάδες 5

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο. Να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι $f(x) \leq -5$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α.

Διάστημα	Συχνότητα v_i	Μέσο διαστήματος K_i	$v_i K_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Σχετική αθροιστική συχνότητα %
[2, 4)	3	3	9	12%	12%
[4, 6)	6	5	30	24%	36%
[6, 8)	8	7	56	32%	68%
[8, 10)	5	9	45	20%	88%
[10,12)	3	11	33	12%	100%
Αθροίσματα	25		173	100%	

β. Μέσος Χρόνος Καθυστερήσεων = $\frac{9+30+56+45+33}{25} = \frac{173}{25} = 6,92$ λεπτά.

γ. Τα δρομολόγια που είχαν καθυστέρηση τουλάχιστον 6 λεπτά είναι στο πλήθος:
 $8+5+3 = 16$.

δ. Το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά είναι:
 68%.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{x(x-1)} = x - 3.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 3) = 0 - 3 = -3$$

β. Για $x > 0$ είναι: $f(x) = e^x - \alpha$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - \alpha) = e^0 - \alpha = 1 - \alpha.$$

γ. Το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει όταν και μόνον:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow -3 = 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3.$$

δ. Για $\alpha = 4$ υπολογίστηκε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$.

Η f θα είναι συνεχής στο $x = 0$ όταν και μόνον:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -3 = -3 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0.$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + \kappa$.

- Αφού παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ είναι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2$.
- Αφού το $A(1, 0) \in C_f$ είναι $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + \kappa \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\kappa - 1 = -(-2) - 1 = 1$.
Έτσι $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $f'(x) = 2x - 2$.

β. $f''(x) = (2x - 2)' = 2$, $x \in \mathbb{R}$.

γ. $f(x) + f'(x) + f''(x) = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 2 = x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = (10 \ln x - 5x^2)' = \frac{10}{x} - 10x.$$

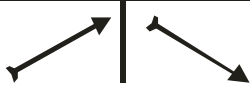
β. Από την εξίσωση $f'(x) = 0$ βρίσκουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{x} - 10x = 0 \Leftrightarrow \frac{10 - 10x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{10(1-x)(1+x)}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Η τιμή $x = -1$ απορρίπτεται, αφού $x > 0$.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών:

x	0	1	$+\infty$
f'		+	-
f			



Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

γ. Η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = 1$ και είναι $f(1) = -5$.

δ. Αφού η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1$ μέγιστο το $f(1) = -5$, προκύπτει ότι:
 $f(x) \leq f(1) = -5$ για κάθε $x > 0$.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΚΥΚΛΟΥ ΤΕΕ

2008

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα ήταν:

8, 14, 20, 12, 16

α. Να υπολογισθεί η μέση βαθμολογία του μαθητή.

Μονάδες 4

β. Να προσδιορισθεί η διάμεσος.

Μονάδες 3

γ. Να υπολογισθεί η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 6

δ. Να υπολογισθεί το εύρος.

Μονάδες 3

ε. Να υπολογισθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας και στη συνέχεια να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)}, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

όπου $\lambda \neq 0$.

α. Να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 10

β. Να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 6

γ. Να υπολογισθεί η τιμή του λ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$.

Μονάδες 9



ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\lambda x}$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

β. Να προσδιορισθούν οι τιμές του λ , ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει:

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$$

Μονάδες 9

γ. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία όταν

i) $\lambda = 2$,

ii) $\lambda = -1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008$.

α. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος f' της f .

Μονάδες 6

β. Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 12

γ. Ναδειχθεί ότι $f(x) \geq 2008$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου $x \in [1, +\infty)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{8+14+20+12+16}{5} = \frac{70}{5} = 14$.

β. Διατάσσουμε κατ' αύξουσα σειρά τους βαθμούς του μαθητή: 8, 12, 14, 16, 20. Έτσι προκύπτει ότι η διάμεσος είναι 14.

γ. Η τυπική απόκλιση είναι

$$s = \sqrt{\frac{(8-14)^2 + (14-14)^2 + (20-14)^2 + (12-14)^2 + (16-14)^2}{5}} =$$
$$= \sqrt{\frac{36+36+4+4}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = 4.$$

δ. Εύρος = $20 - 8 = 12$.

ε. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{\lambda(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\lambda(x-1)(\sqrt{x} + 1)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)}{\lambda(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2\lambda}.$$

β. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{2}.$$

γ. Η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

$$\text{Δηλαδή } \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Επομένως } \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } \lambda = 1.$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\lambda x})' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \text{ και} \\ f''(x) &= (\lambda \cdot e^{\lambda x})' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

β. Από τη δοσμένη σχέση:

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$$

με αντικατάσταση των:

$$f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad f'(x) = \lambda e^{\lambda x} \text{ και } f(x) = e^{\lambda x}$$

έχουμε:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} (\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -1).$$

γ.

- Για την τιμή $\lambda = 2$ η $f(x)$ γράφεται: $f(x) = e^{2x}$.

Είναι: $f'(x) = 2e^{2x}$ και επειδή $e^{2x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Για την τιμή $\lambda = -1$ η $f(x)$ γράφεται: $f(x) = e^{-x}$.

Είναι: $f'(x) = -e^{-x}$ και επειδή $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι $-e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

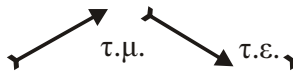
Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008 \right)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (3x^2) - 2 \cdot (2x) + 3 = x^2 - 4x + 3, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

β. Είναι $f'(x) = (x - 1)(x - 3)$ οπότε προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'	+	○	-	+
f				

Δηλαδή:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$.
- Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 και τοπικό ελάχιστο στο 3.

γ. Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι $f(x) \geq f(3) = 2008$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Πιο αναλυτικά:

- Για $1 \leq x \leq 3$ αφού f γνησίως φθίνουσα έπεται: $f(1) \geq f(x) \geq f(3)$.
- Για $x \geq 3$ αφού f γνησίως αύξουσα έπεται: $f(x) \geq f(3)$.

Άρα για κάθε $x \in [1, +\infty)$ είναι $f(x) \geq f(3) = 2008$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. (ΟΜΑΔΑ Α')

2009

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 7

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας (μεταβολής) ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι μικρότερη του 10%, τότε ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

Μονάδες 3

β. $(\sin x)' = \eta \mu x$

Μονάδες 3

γ. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (a, b) .

Μονάδες 3

δ. $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$, όπου c σταθερά.

Μονάδες 3

Γ. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A , τότε να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $(f \cdot g)'(x) = \dots\dots\dots$

Μονάδες 2

β. $(c \cdot f)'(x) = \dots\dots\dots$ όπου c σταθερά.

Μονάδες 2

γ. $\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \dots\dots\dots$ με $b > a > 0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Ρωτήθηκαν 25 μαθητές μιας τάξης ενός Λυκείου πόσα λογοτεχνικά βιβλία διάβασαν την περσινή χρονιά. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Βιβλία x_i	Μαθητές v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i v_i$
1	4				
2					
3	8				
4	7				
Αθροίσματα					

Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

Β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

Γ. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

Μονάδες 5

Δ. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασε τουλάχιστον δύο (2) βιβλία;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x^2 + 6x + 8$

Α. Να υπολογίσετε την $f'(x)$

Μονάδες 4

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 8

Γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο; Να βρείτε το είδος του ακροτάτου.

Μονάδες 6

Δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^3 f(x) dx$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + 4x + 2ae^x$

$$\text{όπου } a = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

A. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a .

Μονάδες 5

B. Για $a = 1$

α. Να υπολογίσετε την $f'(x)$

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$, είναι ίσο με $84 + 2e^4 - 2e^2$ τ.μ.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A) Θεωρία: Ορισμός σελ. 134 σχολικού βιβλίου.

B)

α	β	γ	δ
Σ	Λ	Λ	Σ

Γ) α) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

β) $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\alpha}^{\beta} = \ln \beta - \ln \alpha = \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$.

ΘΕΜΑ 2ο

A)

Βιβλία x_i	Μαθητές v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i v_i$
1	4	16	4	16	4
2	6	24	10	40	12
3	8	32	18	72	24
4	7	28	25	100	28
Αθροίσματα	25	100			68

B) Από τον πίνακα προκύπτει ότι η διάμεσος τιμή (13η τιμή σε αύξουσα ταξινόμηση) είναι $\delta = 3$.

Γ) $\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = \frac{68}{25}$.

Δ) Το ποσοστό των μαθητών που διάβασε τουλάχιστον 2 βιβλία είναι $(24 + 32 + 28)\% = 84\%$

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Είναι $f'(x) = (-x^2 + 6x + 8)' = -2x + 6$.

B) Έχουμε ότι $f'(x) = -2x + 6$ και τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	+		-
f			

Γ) Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολών η f παρουσιάζει στο $x_0 = 3$ τοπικό μέγιστο.

Δ) Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^3 (-x^2 + 6x + 8) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + 8x \right]_0^3 = \\&= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right]_0^3 = \\&= \left[-\frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 + 24 \right] - [0] = \\&= [-9 + 27 + 24] = 42.\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A) Είναι: $a = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = 1$.

B)

α) Για $a = 1$ είναι $f(x) = x^3 + 4x + 2e^x$.
Έτσι $f'(x) = 3x^2 + 4 + 2e^x$.

β) Επειδή είναι $3x^2 + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, καθώς επίσης και $2e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Επειδή f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχουμε ότι:

$$\text{Αν } 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow$$

$$f(2) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow$$

$$2^3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot e^2 \leq f(x) \leq 4^3 + 4 \cdot 4 + 2e^4 \Rightarrow$$

$$0 < 16 + 2e^2 \leq f(x) \leq 80 + 2e^4.$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 (x^3 + 4x + 2e^x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 2e^x \right]_2^4 =$$

$$= (4^3 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot e^4) - (4 + 2 \cdot 2^2 + 2e^2) =$$

$$= 84 + 2e^4 - 2e^2 \text{ τ.μ.}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2010

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

- A1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

- A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $\ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Ισχύει ότι: $\int_a^a f(x) dx = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 12

- A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots\dots\dots$, με $g(x) \neq 0$.

β) $(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots$, με $x > 0$.

γ) $(e^x)' = \dots\dots\dots$

δ) $(\sin x)' = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β.

Οι ημέρες απουσίας 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας από την εργασία τους, τον περασμένο μήνα, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i n_i$
0	8				
1	10				
2					
3	10				
4	5				
5	2				
Αθροίسمατα					

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής x .

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο της μεταβλητής x .

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των υπαλλήλων που απουσίασαν από 2 έως και 4 ημέρες.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}, & x < 1 \\ \sqrt{x+3} + \alpha, & x \geq 1, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Μονάδες 5

Γ4. Για $\alpha = -3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 3f(0) + 2f(6)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε:

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ4. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x) dx$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** (Θεωρία). Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε συμβολίζουμε το όριο αυτό $f'(x_0)$ και το ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 .

- A2.** α. Λ
β. Σ
γ. Σ
δ. Λ

A3. α. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ με $g(x) \neq 0$.

β. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, με $x > 0$.

γ. $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

δ. $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

B1.

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι v_i	Σχετική Συχνότητα f_i %	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i v_i$
0	8	16%	8	16	0
1	10	20%	18	36	10
2	15	30%	33	66	30
3	10	20%	43	86	30
4	5	10%	48	96	20
5	2	4%	50	100	10
Αθροίσματα	50	100%			100

$$v_3 = 50 - (8 + 10 + 10 + 5 + 2) = 15.$$

B2. $\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 + v_5 x_5 + v_6 x_6}{v} = \frac{0 + 10 + 30 + 30 + 20 + 10}{50} = \frac{100}{50} = 2.$

B3. Επειδή $v = 50$ είναι $\delta = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$.

B4. Το πλήθος των υπαλλήλων που απουσίασαν από 2 έως και 4 ημέρες είναι $v_3 + v_4 + v_5 = 15 + 10 + 5 = 30$.
Το αντίστοιχο ποσοστό είναι 60 %.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{x+1} = -1.$$

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3} + a) = a + 2.$$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

$$\text{Από την τελευταία έχουμε: } -1 = a + 2 = a + 2.$$

$$\text{Οπότε } a + 2 = -1 \Leftrightarrow a = -3.$$

Γ4. Για την τιμή $a = -3$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot f(0) + 2f(6) = 3 \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 3}{0^2 - 1} + 2 \cdot (\sqrt{6+3} - 3) = 3(-3) + 2(3 - 3) = \\ &= -9 + 0 = -9. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Η f ως πολυωνυμική είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ είναι $f'(2) = 0$.

$$\text{Όμως } f'(x) = x^2 - 5x + \alpha.$$

$$\text{Οπότε } 4 - 10 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -6 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6.$$

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$ θα είναι

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Δ2. Για τις τιμές $\alpha = 6$ και $\beta = 1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \quad \text{με} \quad f'(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Από την εξίσωση $f'(x) = 0$ έχουμε: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$.

Βρίσκουμε $x = 2$ ή $x = 3$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
f'	+	$\circ$	-	$\circ$	+
f					

Επομένως η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$.
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

Δ3. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολών έχουμε:

- στη θέση $x = 2$ τοπικό μέγιστο το $f(2) = \frac{17}{3}$.
- στη θέση $x = 3$ τοπικό μέγιστο το $f(3) = \frac{11}{2}$.

Δ4. Είναι:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 dx - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \right) dx = \frac{1}{3} \int_1^2 x^3 dx - \frac{5}{2} \int_1^2 x^2 dx + 6 \int_1^2 x dx + \int_1^2 dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 - \frac{5}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + [x]_1^2 = \frac{1}{3} \left[4 - \frac{1}{4} \right] - \frac{5}{2} \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right] + 6 \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right] + [2 - 1] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} - \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3} + 6 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{15}{12} - \frac{35}{6} + \frac{18}{2} + 1 = \frac{65}{12}. \end{aligned}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2011

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Τι ονομάζεται εύρος μιας μεταβλητής;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή (μέσος όρος) υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές.

(Μονάδες 2)

β) Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και είναι $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$$

(Μονάδες 2)

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 2)

δ) Ισχύει ότι $\int_a^b \eta \mu x \, dx = \sigma \nu \nu \beta - \sigma \nu \nu \alpha$.

(Μονάδες 2)

ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

(Μονάδες 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $(\ln x)' = \dots\dots\dots$, με $x > 0$

(Μονάδες 3)

β) $(\eta \mu x)' = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 3)

γ) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $a \in \mathbb{R}$, τότε $\int_a^a f(x) \, dx = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} & \text{αν } x < 4 \\ \alpha & \text{αν } x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3 & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

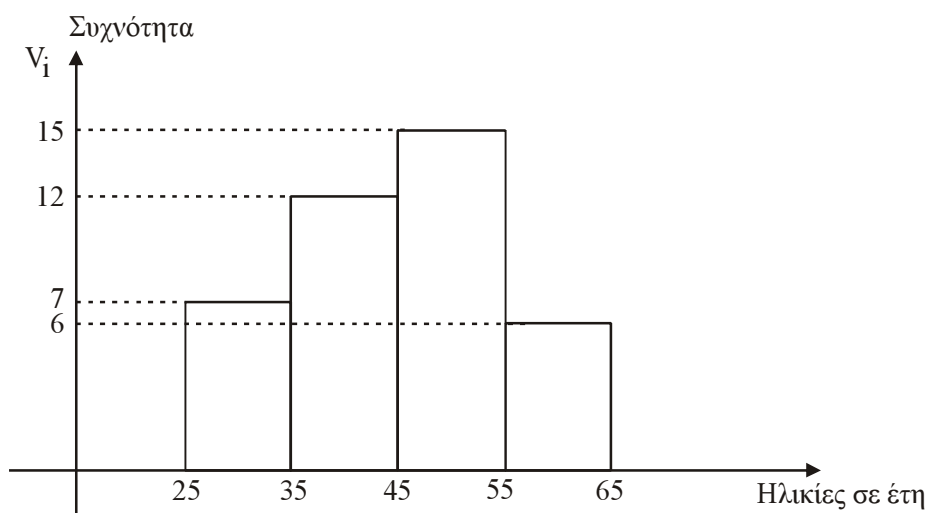
Μονάδες 10

B3. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα v_i	$K_i \cdot v_i$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)					
[35,45)					
[45,55)					
[55,65)					
Σύνολα					

Μονάδες 10

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων.

Μονάδες 5

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών;

Μονάδες 5

Γ4. Τί ποσοστό εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Δ2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 f'(x) dx$

Μονάδες 6

Δ4. Αν $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$ με $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 3$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Θεωρία: Εύρος μιας μεταβλητής είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή της μεταβλητής.

A2. $\alpha) \rightarrow \Sigma, \beta) \rightarrow \Sigma, \gamma) \rightarrow \Lambda, \delta) \rightarrow \Lambda, \epsilon) \rightarrow \Sigma$.

A3.

α) $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \text{ με } x > 0.$

β) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x.$

γ) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $a \in \mathbb{R}$, τότε $\int_a^a f(x)dx = 0.$

ΘΕΜΑ Β

B1. Για $x < 4$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \frac{(x-3)(x-4)}{x-4} = x-3.$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-3) = 4-3 = 1.$$

B2. Για $x > 4$ είναι:

$$f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} - 3 = \sqrt{x}+2-3 = \sqrt{x}-1.$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x}-1) = \sqrt{4}-1 = 1.$$

B3. Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 4$, πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow a = 1.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα v_i	$K_i \cdot v_i$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)	30	7	210	7	17,5
[35,45)	40	12	480	19	30
[45,55)	50	15	750	34	37,5
[55,65)	60	6	360	40	15
Σύνολα		40	1800		100

Γ2. Από τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει: $\bar{x} = \frac{1800}{40} = 45.$

- Γ3.** Από τον ίδιο πίνακα προκύπτει ότι ηλικία τουλάχιστον 45 ετών έχουν: $15 + 6 = 21$ εργαζόμενοι.
- Γ4.** Από τη στήλη της σχετικής συχνότητας του πίνακα προκύπτει ότι ηλικία κάτω των 35 ετών έχουν το 17,5 % των εργαζομένων.

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)' = 3x^2 - 12x + 9 = \\ &= 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1) \cdot (x-3), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'	+	○	○	+
f	↗	↘	↗	
		T.M.	T.E.	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

- Δ2.** Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 1$, την τιμή $f(1) = 5$, ενώ έχει και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 3$, την τιμή $f(3) = 1$.

- Δ3.** Είναι $I = \int_1^3 f'(x) dx = [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 5 = -4$.

- Δ4.** Το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα: $\int_0^3 |g(x)| dx$

Όμως επειδή είναι $g(x) = f'(x)$ γνωρίζουμε από τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$ ότι είναι

α) για $x \in [0, 1]$: $g(x) = f'(x) \geq 0$.

β) για $x \in [1, 3]$: $g(x) = f'(x) \leq 0$.

Έτσι είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |g(x)| dx + \int_1^3 |g(x)| dx = \int_0^1 g(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = [f(x)]_0^1 - [f(x)]_1^3 = \\ &= f(1) - f(0) - f(3) + f(1) = 5 - 1 - 1 + 5 = 8 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Μονάδες 6

- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . (Μονάδες 2)
- β)** Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής. (Μονάδες 2)
- γ)** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \quad \text{με } \alpha < \gamma < \beta. \quad (\text{Μονάδες 2})$$

- δ)** Ισχύει ότι: $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x > 0$ (Μονάδες 2)

- ε)** Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g' . Τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx \quad (\text{Μονάδες 2})$$

Μονάδες 10

- A3.** Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

- α)** $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \dots$ με $\beta > \alpha > 0$ (Μονάδες 3)

- β)** Έστω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι: $(g \circ f)'(x) = \dots$ (Μονάδες 3)

- γ)** $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = \dots$ με c σταθερά και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$	$x_i \nu_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	$2\kappa + 1$			
Σύνολα	$\nu = 25$		100	

B1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ .

Μονάδες 4

B2. Για $\kappa = 3$ να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 8

B3. Για $\kappa = 3$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

B4. Για $\kappa = 3$ να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τα α και β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Δ1. Να βρείτε την παράγουσα F της f , αν $F(0) = 1$.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F .

Μονάδες 8

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές $F(2011)$ και $F(2012)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σελ. 81 Σχολ. βιβλίου.

A2. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

A3. α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \ln \beta - \ln \alpha$, β) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, γ) $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πλήθος των μαθητών είναι 25, άρα $6 + 5 + 4 + \kappa + 2\kappa + 1 = 25 \Leftrightarrow \kappa = 3$.

B2.

Ημερήσιες ώρες x_i	Μαθητές v_i	Αθροιστική Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα % f_i %	$x_i v_i$
1	6	6	24%	6
2	5	11	20%	10
3	4	15	16%	12
4	3	18	12%	12
5	7	25	28%	35
Σύνολο	$v = 25$		100	75

B3. Μέση τιμή: Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι:

$$\bar{x} = \frac{6+10+12+12+35}{25} = \frac{75}{25} = 3 \text{ ώρες.}$$

Η διάμεσος δ ισούται με τη μεσαία παρατήρηση x_{13} , η οποία από τη στήλη της αθροιστικής συχνότητας του προηγούμενου πίνακα προκύπτει 3.

Είναι δηλαδή $\delta = x_{13} = 3$ ώρες.

B4. Το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν 3 ώρες τουλάχιστον ημερησίως, από τον πίνακα προκύπτει $\frac{4+3+7}{25} = \frac{14}{25} = 56\%$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x^2 + \beta x) = \alpha + \beta.$

Γ2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3}+2) = 4.$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, όταν $\alpha + \beta = 4$ (1).
Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ όταν $f(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha(-1)^2 + \beta(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει $\alpha = 3, \beta = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για την παράγουσα F της f έχουμε: $F(x) = x^3 - x^2 - x + c$. Επειδή $F(0) = 1$ έπεται $c = 1$ οπότε $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Δ2. Είναι $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x - 1) \cdot (x + \frac{1}{3})$. Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολής:

x	$-\infty$	$-1/3$		1	$+\infty$
$F'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$F(x)$					
		$\tau.\max$		$\tau.\min$	

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι η F είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, $[1, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{1}{3}, 1]$. και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $F(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$ και τοπικό ελάχιστο $F(1) = 0$.

Δ3. Επειδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και $2011, 2012 \in [1, +\infty)$ με $2011 < 2012$ προκύπτει ότι $F(2011) < F(2012)$.

Δ4. Είναι $E(\Omega) = -\int_0^1 (3x^2 - 2x - 1) dx = -\left[x^3\right]_0^1 + \left[x^2\right]_0^1 + [x]_0^1 = -1 + 1 + 1 = 1$ τ.μ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Μονάδες 6

- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . (Μονάδες 2)
- β)** Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής. (Μονάδες 2)
- γ)** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \quad \text{με } \alpha < \gamma < \beta. \quad (\text{Μονάδες 2})$$

- δ)** Ισχύει ότι: $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x > 0$ (Μονάδες 2)

- ε)** Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g' . Τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx \quad (\text{Μονάδες 2})$$

Μονάδες 10

- A3.** Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \dots$ με $\beta > \alpha > 0$ (Μονάδες 3)

- β)** Έστω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι: $(g \circ f)'(x) = \dots$ (Μονάδες 3)

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = \dots$ με c σταθερά και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$	$x_i \nu_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	$2\kappa + 1$			
Σύνολα	$\nu = 25$		100	

B1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ .

Μονάδες 4

B2. Για $\kappa = 3$ να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 8

B3. Για $\kappa = 3$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

B4. Για $\kappa = 3$ να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τα α και β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Δ1. Να βρείτε την παράγουσα F της f , αν $F(0) = 1$.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F .

Μονάδες 8

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές $F(2011)$ και $F(2012)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σελ. 81 Σχολ. βιβλίου.

A2. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

A3. α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \ln \beta - \ln \alpha$, β) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, γ) $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πλήθος των μαθητών είναι 25, άρα $6 + 5 + 4 + \kappa + 2\kappa + 1 = 25 \Leftrightarrow \kappa = 3$.

B2.

Ημερήσιες ώρες x_i	Μαθητές v_i	Αθροιστική Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα % f_i %	$x_i v_i$
1	6	6	24%	6
2	5	11	20%	10
3	4	15	16%	12
4	3	18	12%	12
5	7	25	28%	35
Σύνολο	$v = 25$		100	75

B3. Μέση τιμή: Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι:

$$\bar{x} = \frac{6+10+12+12+35}{25} = \frac{75}{25} = 3 \text{ ώρες.}$$

Η διάμεσος δ ισούται με τη μεσαία παρατήρηση x_{13} , η οποία από τη στήλη της αθροιστικής συχνότητας του προηγούμενου πίνακα προκύπτει 3.

Είναι δηλαδή $\delta = x_{13} = 3$ ώρες.

B4. Το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν 3 ώρες τουλάχιστον ημερησίως, από τον πίνακα προκύπτει $\frac{4+3+7}{25} = \frac{14}{25} = 56\%$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x^2 + \beta x) = \alpha + \beta.$

Γ2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3}+2) = 4.$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, όταν $\alpha + \beta = 4$ (1).
Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ όταν $f(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha(-1)^2 + \beta(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει $\alpha = 3, \beta = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για την παράγουσα F της f έχουμε: $F(x) = x^3 - x^2 - x + c$. Επειδή $F(0) = 1$ έπεται $c = 1$ οπότε $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Δ2. Είναι $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x - 1) \cdot (x + \frac{1}{3})$. Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολής:

x	$-\infty$	$-1/3$		1	$+\infty$
$F'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$F(x)$					
		$\tau.\max$		$\tau.\min$	

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι η F είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, $[1, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{1}{3}, 1]$. και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $F(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$ και τοπικό ελάχιστο $F(1) = 0$.

Δ3. Επειδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και $2011, 2012 \in [1, +\infty)$ με $2011 < 2012$ προκύπτει ότι $F(2011) < F(2012)$.

Δ4. Είναι $E(\Omega) = -\int_0^1 (3x^2 - 2x - 1) dx = -\left[x^3\right]_0^1 + \left[x^2\right]_0^1 + [x]_0^1 = -1 + 1 + 1 = 1$ τ.μ.

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)**

**ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και η F είναι μία

παράγουσα της f , τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

(Μον. 2)

β) Το εύρος των τιμών μιας μεταβλητής δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της.

(Μον. 2)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ μία σταθερά, τότε ισχύει:

$$(c \cdot f)'(x) = f'(x) + c$$

(Μον. 2)

δ) $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha+1}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}^*$.

(Μον. 2)

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx.$$

(Μον. 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε: $(f - g)'(x) = \dots$

(Μον. 3)

β) $\int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx = \dots$

(Μον. 3)

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \dots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, για $x \neq 2$.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε το $f(2)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ηλικίες των υπαλλήλων μίας εταιρείας:

Α/Α	Ηλικίες υπαλλήλων	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i \nu_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
1 ^η κλάση	[25, 35)	100			
2 ^η κλάση	[35, 45)	50			
3 ^η κλάση	[45, 55)	40			
4 ^η κλάση	[55, 65)	10			
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu=200$			

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση ηλικία των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν ηλικία τουλάχιστον σαράντα πέντε (45) ετών.

Μονάδες 4

Γ4. Από την εταιρεία αποχωρούν πέντε (5) υπάλληλοι της 4^{ης} κλάσης, πέντε (5) υπάλληλοι της 2^{ης} κλάσης και ταυτόχρονα προσλαμβάνονται δέκα (10) υπάλληλοι με ηλικίες στην 1^η κλάση. Να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή της ηλικίας των υπαλλήλων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = f(x) + e^x$.

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 9

Δ3. Αν $g(x) = f(x) + e^x$, $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΛ 2014

ΘΕΜΑ Α

A1 ΟΡΙΣΜΟΣ 2 ΣΕΛ.138

A2 Σ

Λ

Λ

Λ

Σ

A3 $= f'(x) - g'(x)$

$= \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$

$= |\gamma|$

ΘΕΜΑ Β

B1 $xf(x) - 2f(x) = x^2 - 4, x \in \mathbb{R}$

$(x-2)f(x) = x^2 - 4, \text{ για } x \neq 2$

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ για } x \neq 2$

B2 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4$

B3 Η συνεχής στο 2 (αφού συνεχής στο $\mathbb{R}$): $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow f(2) = 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

ΗΛΙΚΙΕΣ	v_i	x_i	$v_i \cdot x_i$	$f_i \%$
[25,35)	100	30	3000	50
[35,45)	50	40	2000	25
[45,55)	40	50	2000	20
[55,65)	10	60	600	5
ΣΥΝΟΛΟ	200	-----	7600	100

Γ2

$\bar{x} = \frac{7600}{200} = 38 \text{ χρόνια}$

$$\Gamma 3 \quad f_3 \% + f_4 \% = 20\% + 5\% = 25\%$$

Γ4

ΗΛΙΚΙΕΣ	v_i	x_i	$v_i \cdot x_i$
[25,35)	110	30	3300
[35,45)	45	40	1800
[45,55)	40	50	2000
[55,65)	5	60	300
ΣΥΝΟΛΟ	200	-----	7400

$$\bar{x} = \frac{7400}{200} = 37 \text{ χρόνια}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1 \quad f'(x) = (e^x)'(x-1) + e^x(x-1)' = e^x(x-1) + e^x = f(x) + e^x$$

$$\Delta 2 \quad f'(x) = x e^x$$

$$f'(x) = x e^x = 0 \text{ επειδή } e^x > 0 \text{ έχω } x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	+
f(x)			

ΕΛΑΧ

Η f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 με τιμή $f(0) = -1$

Δ3 Παρατηρούμε ότι $g(x) = f'(x)$ οπότε $g(x) > 0$ για $x > 0$ και $g(x) < 0$ για $x < 0$

$$\text{Άρα } E = - \int_{-1}^0 f'(x) dx + \int_0^1 f'(x) dx = -f(0) + f(-1) + f(1) - f(0) = 1 - 2e^{-1} + 0 + 1 = 2(1 - e^{-1}) \text{ τ.μ.}$$

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)**

**ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Για μία συνεχή συνάρτηση f να γράψετε τις τρεις κατηγορίες σημείων, τα οποία είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η επικρατούσα τιμή μίας μεταβλητής είναι μοναδική.

(Μον. 2)

β) Έστω συνεχής συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της f (δηλαδή $f'(x_0) = 0$). Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 όταν $f''(x_0) < 0$.

(Μον. 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$. Τότε ισχύει:

$$\int_a^a f(x)dx = a, \text{ όπου } a \in \mathbb{R}^*$$

(Μον. 2)

δ) Αν οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A , τότε και η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$$

(Μον. 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ε) Η σχετική συχνότητα τιμής x_i μίας μεταβλητής συμβολίζεται με f_i και ισχύει $f_i = \frac{v_i}{v}$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \dots$, με $\beta > \alpha > 0$

(Μον. 3)

β) $(c)' = \dots$, αν c σταθερά

(Μον. 3)

γ) Αν η μεταβλητή x παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ τότε η μέση τιμή της μεταβλητής είναι: $\bar{x} = \dots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) 50 μαθητών της Γ΄τάξης ενός ΕΠΑ.Λ για να γράψουν ένα διαγώνισμα, δίνονται στον παρακάτω πίνακα κατανομής:

Χρόνος σε λεπτά	Κέντρο κλάσης κ_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$\kappa_i \cdot v_i$
[5 – 15)		20		
[15 – 25)			34	
[25 – 35)		12		
[35 – 45)				
ΣΥΝΟΛΑ		$v = 50$		

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να τον συμπληρώσετε σωστά.

Μονάδες 7

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του χρόνου, που χρειάστηκαν οι μαθητές για να γράψουν το διαγώνισμα.

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 (Μον. 7) και την τυπική απόκλιση s της μεταβλητής (Μον. 2).

Μονάδες 9

B4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV%.

Μονάδες 4

(Δίνεται: $\sqrt{96} \approx 10$)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} & , \text{ αν } x > 2 \\ 4x + 4e^{x-2}, & \text{ αν } x \leq 2 \end{cases}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Γ1. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\lambda=1$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Μία ομάδα περιβαλλοντολόγων εκτιμά ότι το βάρος B (B σε τόνους) ενός παγόβουνου μεταβάλλεται με τον χρόνο t (t σε έτη) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15, \quad 0 \leq t \leq 10$$

Δ1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου.

Μονάδες 5

Δ2. Ποιά χρονική στιγμή το βάρος του παγόβουνου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι, αν $t \in [6, 9]$, τότε ισχύει:

$$B(9) \leq B(t) \leq B(6)$$

Μονάδες 5

Δ4. Ποιά χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος;

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων, σχολικό βιβλίο σελίδα 212.

A2. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

A3. α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\alpha}^{\beta} = \ln \beta - \ln \alpha$

β) $(c)' = 0$

γ) $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot \nu_1 + x_2 \cdot \nu_2 + \dots + x_k \cdot \nu_k}{\nu}$

ΘΕΜΑ Β

B1.

κλάσεις	k_i	ν_i	N_i	$k_i \cdot \nu_i$
[5 – 15)	10	20	20	200
[15 – 25)	20	14	34	280
[25 – 35)	30	12	46	360
[35 – 45)	40	4	50	160
Σύνολο	-	50	-	1000

• Αν $[\alpha, \beta)$ η κλάση, τότε η κεντρική τιμή είναι:

$$k_i = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

• $N_i = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i$

B2. Η μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \frac{k_1 \cdot \nu_1 + k_2 \cdot \nu_2 + k_3 \cdot \nu_3 + k_4 \cdot \nu_4}{\nu} = \frac{1000}{50} \Rightarrow \bar{x} = 20$

B3. Η διακύμανση είναι: $s^2 = \frac{(k_1 - \bar{x})^2 \cdot \nu_1 + (k_2 - \bar{x})^2 \cdot \nu_2 + (k_3 - \bar{x})^2 \cdot \nu_3 + (k_4 - \bar{x})^2 \cdot \nu_4}{\nu} =$
 $= \frac{(10-20)^2 \cdot 20 + (20-20)^2 \cdot 14 + (30-20)^2 \cdot 12 + (40-20)^2 \cdot 4}{50} = \frac{480}{5} = 96 \Leftrightarrow s^2 = 96$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{96} \Rightarrow s \approx 10$

B4. Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι:

$CV = \frac{s}{\bar{x}} 100\% = \frac{\sqrt{96}}{20} 100\% \approx 0,5 \cdot 100\% \Leftrightarrow CV \approx 50\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x + 4e^{x-2}) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot e^{2-2} = 12$

Γ2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{\lambda(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+2x+4}{\lambda} = \frac{12}{\lambda}$

Γ3. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$
 $f(2) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot e^0 = 12$. Επομένως: $12 = \frac{12}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1$

Γ4. Θέλουμε το $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (4x + 4e^{x-2}) dx = 4 \int_1^2 x dx + 4 \int_1^2 e^{x-2} dx =$
 $= 2[x^2]_1^2 + 4[e^{x-2}]_1^2 = 2 \cdot 3 + 4(e^0 - e^{-1}) = 6 + 4 - 4e^{-1} = 10 - \frac{4}{e}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 12t + 15, 0 \leq t \leq 10$ και

ο ρυθμός μεταβολής: $B'(t) = -t^2 + 4t + 12$

Δ2. $B'(t) = 0 \Rightarrow -t^2 + 4t + 12 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 12 \end{array} \right| \begin{array}{l} \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \\ = 16 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = \\ = 16 + 48 = 64 \end{array} \left| \begin{array}{l} t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm 8}{-2} = \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ -2 \end{array} \right. \\ \text{άρα } t_1 = 6 \text{ και } t_2 = -2 \end{array} \right.$$

t	-2	0	6	10
$B'(t)$	- ⊖ +	+ ⊕ -	- ⊖ +	
$B(t)$	↘ ↗	↗ ↘	↘ ↗	

Για $t = 6$ έτη το βάρος του παγόβουνου μεγιστοποιείται.

Δ3. Αν $t \in [6,9]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για $6 \leq t \leq 9$ είναι $B(6) \geq B(t) \geq B(9)$ ή $B(9) \leq B(t) \leq B(6)$.

Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής είναι: $B'(t) = -t^2 + 4t + 12$ και $B''(t) = -2t + 4$
 $B''(t) = 0 \Rightarrow -2t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2$

t	0	2	10
$B''(t)$	+ ⊕ -	- ⊖ +	
$B'(t)$	↗ ↘	↘ ↗	

Άρα μεγιστοποιείται για $t = 2$ έτη.