ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=(x)'=1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 8

Α2. **α.** Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές; (μον. 3)

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής; (μον. 4)

Μονάδες 7

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Ισχύει $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)'=f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$, όπου f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

δ. Σε κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, αν α_i συμβολίζει το τόξο του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα v_i , τότε $\alpha_i = \frac{v}{v_i} \cdot 360^o$ για $i=1,2,...,\kappa$ και v το μέγεθος του δείγματος.

ε. Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \to x_o} g(x) = l_2$, όπου l_1, l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim_{x \to x_o} (f(x)g(x)) = l_1 l_2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι τιμές ενός δείγματος είναι $11, 7, \kappa, 13, 11, 10$ όπου $\kappa > 0$. Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του είναι $s^2 = 4$.

Β1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 5

Β2. Αν $\bar{x} = 10$, να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ.

Μονάδες 7

Β3. Αν $\kappa = 8$, να υπολογίσετε τη διάμεσο (δ) (μον. 4) και το εύρος (R) (μον. 2) του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 6

Β4. Αν από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές (μον. 5) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (μον. 2).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$.

Μονάδες 3

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 5) και να δείξετε ότι $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μον. 6).

Μονάδες 11

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\left(5, f\left(5\right)\right)$.

Μονάδες 6

Γ4. Αν Α, Β είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α (μον. 3) και Β (μον. 2).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$

Δ1. Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 4) και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\dfrac{3}{8}\right)$ και $f\left(\dfrac{5}{6}\right)$ (μον. 3).

Μονάδες 7

Δ2. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x} - 1\right) \cdot \left(x^2 - x\right)} .$$

Μονάδες 7

Δ3. Για $\lambda = 3$ να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 5 (πέντε)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έχουμε,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1.$$

Άρα $(x)'=1$.

Α2. α. Οι τιμές της μεταβλητής είναι αριθμοί.

β. Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται:

- Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές.
- Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β).

Α3. α. Λάθος *(διότι το σωστό είναι $-\frac{1}{x^2}$ που την αναφέρει το σχ. βιβλίο σε παράδειγμα και όχι ως θεωρία)*

β. Σωστό

γ. Λάθος (είναι μέτρο θέσης)

δ. Λάθος (το σωστό είναι $\frac{\nu_i}{\nu}360^0$)

ε. Σωστό

Σημείωση: Δεν χρειάζεται δικαιολόγηση στις απαντήσεις του ερωτήματος Α3, τις παραθέτουμε για διδακτικούς σκοπούς.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $CV_x=20\%=0,2$ και $s^2=4\overset{s>0}{\Leftrightarrow}s=2$ όμως $CV_x=\frac{s}{\bar{x}}\Leftrightarrow 0,2=\frac{s}{\bar{x}}\Leftrightarrow \bar{x}=\frac{2}{0,2}=\frac{20}{2}=10$

Σημείωση: Οι τιμές είναι θετικές άρα δεν απαιτείται η μέση τιμή σε απόλυτη τιμή.

Β2. Έχουμε,

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6}t_i}{\nu}\Leftrightarrow 10=\frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6}\Leftrightarrow \kappa+52=60\Leftrightarrow \kappa=8$$

Β3. Τοποθετούμε κατά αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις και έχουμε: $7,8,10,11,11,13$
λόγω του ότι έχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή $\delta=\frac{t_3+t_4}{2}=\frac{10+11}{2}=10,5$ και το εύρος $R=t_{max}-t_{min}=13-7=6$.

Β4. Έχουμε $y_i=x_i-2$ επομένως από τη γνωστή εφαρμογή έχουμε:

$$\overline{y}=\overline{x}-2=10-2=8$$

και $s_y=s_x=2$ επομένως:

$$CV_y=\frac{s_y}{\overline{y}}=\frac{2}{8}=0,25$$

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού το $CV_y>10\%$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)'=\frac{\left(x^2-2x+10\right)'}{2\sqrt{x^2-2x+10}}=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}}=\frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+10}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$$

Γ2. Είναι

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}>0\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}<0\Leftrightarrow x-1<0\Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ το $f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot1+10}=\sqrt{9}=3$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq 3$.

Γ3. Έστω $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(5,f(5))$, τότε

$$\lambda=f'(5)=\frac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot5+10}}=\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$$

και

$$f(5)=\sqrt{5^2-2\cdot5+10}=\sqrt{25}=5$$

Το σημείο $M(5,5)\in(\varepsilon)$, όποτε

$$5=\frac{4}{5}\cdot5+\beta\Leftrightarrow5=4+\beta\Leftrightarrow\beta=1$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(5,5)$ είναι $(\varepsilon): y=\frac{4}{5}x+1$

Γ4. Για να βρούμε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $x'x$, θέτουμε $y=0$ στην εξίσωση της εφαπτομένης και γίνεται:

$$0=\frac{4}{5}x+1\Leftrightarrow\frac{4}{5}x=-1\Leftrightarrow4x=-5\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$$

Οπότε το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $A\left(-\frac{5}{4},0\right)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$, θέτουμε $x=0$ στην εξίσωση της εφαπτομένης και γίνεται:

$$y=\frac{4}{5}\cdot0+1\Leftrightarrow y=0+1\Leftrightarrow y=1$$

Οπότε το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $B(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $\lambda=3$ είναι $f(x)=x^3-3x^2+3x$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(x^3-3x^2+3x\right)'=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+(3x)'=3x^2-6x+3=3\left(x^2-2x+1\right)=3(x-1)^2\geq0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f			$\nearrow$		

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έχουμε,

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{9}{24} \text{ και } \frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}.$$

Επομένως, $\frac{3}{8}<\frac{5}{6}$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε $f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$.

Δ2. Είναι, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x^2-2x+1)}{(\sqrt{x}-1)x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)x(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}^2-1)x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)x}=\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}=\frac{3(1+1)}{1}=6$$

Δ3. Η συνάρτηση που εκφράζει τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι

$$f'(x)=3x^2-6x+3,\ x\in\mathbb{R}.$$

Οπότε $f''(x)=(3x^2-6x+3)'=6x-6=6(x-1),\ x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 6(x-1)>0 \overset{6>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow 6(x-1)<0 \overset{6>0}{\Leftrightarrow} x-1<0 \Leftrightarrow x<1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f'	↘		↗

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η $f'(x)$ έχει την ελάχιστη τιμή της για $x=1$.

Το ζητούμενο σημείο είναι το $A(1,f(1)) \xrightarrow{f(1)=1-3+3=1} A(1,1)$

Δ4. Είναι $f'(x)=(x^3-3x^2+\lambda x)'=(x^3)'-(3x^2)'+(\lambda x)'=3x^2-6x+\lambda,\ x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε, $\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\cdot\lambda=36-12\lambda$

- Αν $\Delta>0$ τότε η $f'(x)$ δεν διατηρεί πρόσημο οπότε η f παρουσιάζει ακρότατα.
- Αν $\Delta<0 \Leftrightarrow 36-12\lambda<0 \Leftrightarrow -12\lambda<-36 \Leftrightarrow \lambda>3$ τότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
f	↗

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda = 0 \Leftrightarrow -12\lambda = -36 \Leftrightarrow \lambda = 3$ τότε έχουμε τον πίνακα του ερωτήματος **Δ1** οπότε η f επίσης δεν παρουσιάζει ακρότατα.
  Τελικά, για να μην παρουσιάζει ακρότατα η f πρέπει $\lambda \geq 3$.
  Η μικρότερη τιμή του λ είναι $\lambda = 3$.