ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=\text{ημ}x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\text{συν}x}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2},\quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.**)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\quad x\in(0,8).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha = 2$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15} .$$

Μονάδες 9

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: Δέκα (10)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

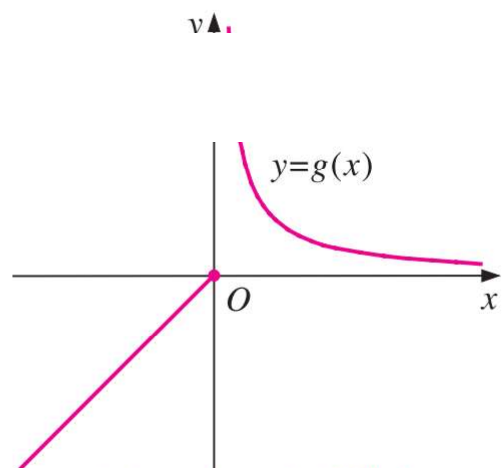
Α2. Α. Ψ

Β. (σχολικό βιβλίο σελ. 35)

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$

είναι «1-1» αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη όπως φαίνεται και στο σχήμα.



(σχήμα από το σχολικό βιβλίο)

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 216

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0), A_2=(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=1+\frac{8}{x^3} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$$

Για να βρούμε το πρόσημο της f' θα βρούμε το πρόσημο του πηλίκου $\frac{x^3+8}{x^3}$ με βάση το παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
x^3+8	-	0	+		+	
x^3	-		-	0	+	
$x^3\cdot(x^3+8)$	+		-		+	

Άρα το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	‖	+	
$f(x)$	↗		↘	‖	↗	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0)$.

Στην θέση $x_0=-2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$

Β2. Η $f'(x)=1+\frac{8}{x^3}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0), A_2=(0,+\infty)$ με παράγωγο :

$$f''(x)=-\frac{24}{x^4}<0 \text{ για κάθε } x\neq 0$$

άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

Β3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-4}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(x^3-4\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right]=-\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}\left(x^3-4\right)=-4$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-4}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\left[\left(x^3-4\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right]=(-4)\cdot(+\infty)=-\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-}\left(x^3-4\right)=-4$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (ο άξονας $y'y$) κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Πλάγιες –Οριζόντιες στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αρκεί τα όρια

$\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί

(αντιστοίχως $\lambda=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$)

Είναι,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4-x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^2}=0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Επίσης,

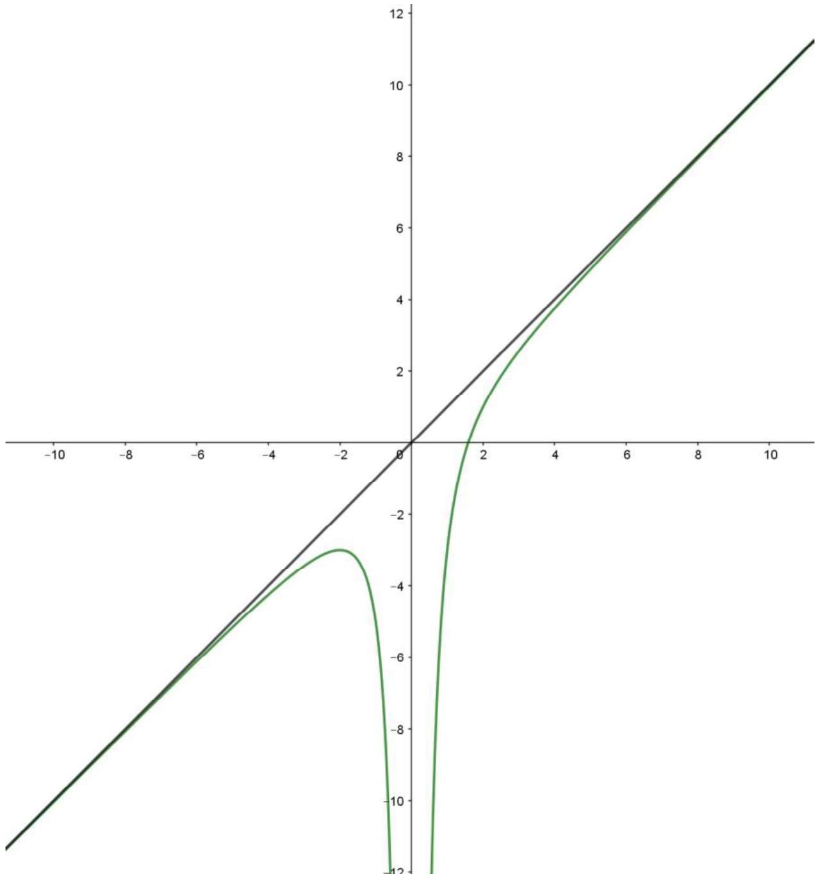
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4-x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{x^2}=0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

Β4. Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω :



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι x m, οπότε η πλευρά του θα είναι $\frac{x}{4}$. Επειδή το x παριστάνει μήκος πρέπει να είναι $x>0$ αλλά και $x<8$ που είναι το συνολικά μήκος του σύρματος, άρα $0<x<8$. Επομένως το εμβαδό του τετραγώνου είναι $\frac{x^2}{16}$. Με το υπόλοιπο του σύρματος το οποίο είναι $8-x$ κατασκευάζουμε τον κύκλο που έχει μήκος:

$$L=2\pi\rho \Leftrightarrow 8-x=2\pi\rho \Leftrightarrow \rho=\frac{8-x}{2\pi}\text{m}$$

Οπότε ο κύκλος έχει εμβαδόν:

$$E=\pi\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{\pi x^2+4(8-x)^2}{16\pi}=\frac{\pi x^2+4\left(64-16x+x^2\right)}{16\pi}$$
$$=\frac{\pi x^2+256-64x+4x^2}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Γ2. Το $E(x)$ ως τριώνυμο του x με $\alpha=\frac{\pi+4}{16\pi}>0$ παρουσιάζει ελάχιστο στο

$$x_0=-\frac{-64}{2(\pi+4)}=\frac{32}{\pi+4}$$

και είναι $E\searrow(0,x_0]$ και $E\nearrow[x_0,8)$, τότε η διάμετρος του κύκλου είναι

$$\delta=2\rho=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8}{\pi+4}$$

και η πλευρά του τετραγώνου είναι

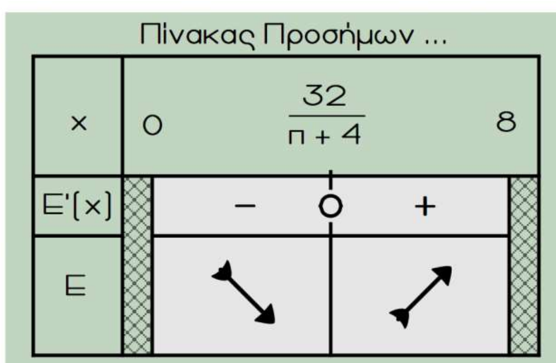
$$\alpha=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}=\delta.$$

Β΄ τρόπος

Η E είναι παραγωγίσιμη με $E'(x)=\frac{1}{16\pi}\left(2(\pi+4)x-64\right)=\frac{1}{8\pi}\left((\pi+4)x-32\right)$ με $x\in(0,8)$

Είναι

- $E'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{32}{4+\pi}$
- $E'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{32}{4+\pi}$
- $E'(x)<0\Leftrightarrow x<\frac{32}{4+\pi}$



Άρα, είναι $E\searrow(0,x_0]$ και $E\nearrow[x_0,8)$ και η E παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\frac{32}{\pi+4}$ το

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{1}{16}\left[(\pi+4)\frac{32^2}{(\pi+4)^2}-64\frac{32}{\pi+4}+8\cdot 32\right]=\frac{32}{16\pi}\left(\frac{32}{\pi}-\frac{64}{\pi}+8\right)=\frac{16}{\pi+4}$$

Τότε η διάμετρος του κύκλου $\delta = 2\rho = \dfrac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{\pi} = \dfrac{8}{\pi+4}$ και η πλευρά του τετραγώνου είναι

$$\alpha = \frac{\dfrac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4} = \delta.$$

Γ3. Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ άρα

$$E\left(\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

αφού $E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right) = \dfrac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi} = \dfrac{256}{16\pi} = \dfrac{16}{\pi}$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ άρα

$$E\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

αφού

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$$

και

$$\lim_{x\to 8^-} E(x) = \lim_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi} = \lim_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)\cdot 8^2-64\cdot 8+256}{16\pi} = 4$$

- $5 \in E\left(\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)$ (διότι $\dfrac{16}{\pi+4} < 5 < \dfrac{16}{\pi} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\pi+4} < \dfrac{5}{16} < \dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow \pi < \dfrac{16}{5} < \pi+4$) και Ε γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_1) = 5$.

- $5 \notin E\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)\right)$ άρα δεν υπάρχει $x_2 \in \left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ ώστε $E(x_2) = 5$ τελικά υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_1) = 5$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

- $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$
- $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$

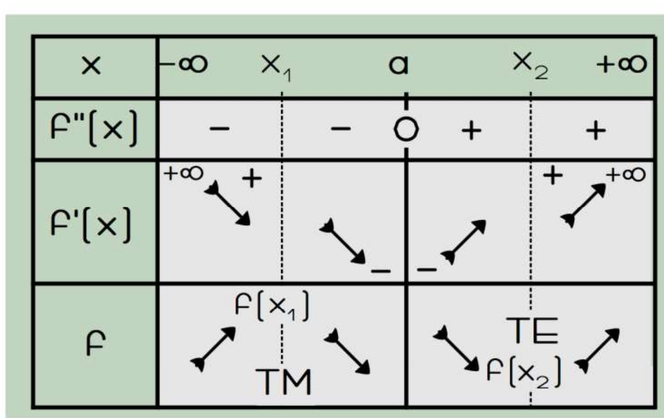
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = e^0 \Leftrightarrow x = \alpha$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$

Έχουμε σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha))$ δηλαδή το $(\alpha, 2-\alpha^2)$, αφού επιπλέον ορίζεται η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$.

Δ2. Είναι,

- $f'(x) = 2\left(e^{x-\alpha} - x\right), \ x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) = 2\left(e^{x-\alpha} - 1\right)$



Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\alpha$ το $f'(\alpha)=2(1-\alpha)<0$ αφού $f' \searrow$ στο $(-\infty,\alpha]$ και $f' \nearrow$ στο $[\alpha,+\infty)$.

Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2\left(e^{x-\alpha}-x\right)\right]=+\infty \text{ διότι, } \lim_{x\to-\infty} e^{x-\alpha}=\lim_{u\to-\infty} e^{u}=0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

Αντίστοιχα,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha}\cdot\left[1-\frac{x}{e^{x-\alpha}}\right]\right)=+\infty \text{ διότι } \lim_{x\to+\infty} e^{x-\alpha}=\lim_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-\alpha}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-\alpha}}=0$

συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{e^{x-\alpha}}\right)=1>0$

- $A_1=(-\infty,\alpha]: f'$ συνεχής και $\searrow$ άρα

$$f'(A_1)=\left[f'(\alpha),\lim_{x\to-\infty} f'(x)\right)=\left[\underbrace{2(1-\alpha)}_{-},+\infty\right)$$

άρα $0\in f'(A_1)\to$ υπάρχει $x_1\in(-\infty,\alpha): f'(x_1)=0$ και x_1 μοναδικό αφού $f' \searrow$ στο A_1

$f'(x)=0=f'(x_1) \overset{f'\searrow \text{ άρα } 1-1}{\Leftrightarrow} x=x_1$

$f'(x)>0=f'(x_1) \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} x<x_1$

$f'(x)<0=f'(x_1) \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} x>x_1$

- $A_2=[\alpha,+\infty): f'$ συνεχής και $\nearrow$ άρα $f'(A_2)=\left[f'(\alpha),\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right)=\left[\underbrace{2(1-\alpha)}_{-},+\infty\right)$

$0\in f'(A_2)\Rightarrow$ υπάρχει $x_2\in(\alpha,+\infty): f'(x_2)=0$ και x_2 μοναδικό αφού $f' \nearrow$ στο A_2

$f'(x)=0=f'(x_2) \underset{1-1}{\overset{f'\nearrow A_2}{\Leftrightarrow}} x=x_2$

$f'(x)>0=f'(x_2) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x>x_2$

$f'(x)<0=f'(x_2) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x<x_2$

έτσι έχουμε $f \nearrow$ στο $(-\infty,x_1],[x_2,+\infty)$ και $f \searrow$ στο $[x_1,x_2]$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-f(1),\ x\in[\alpha,x_2]$ έχουμε:

$$g'(x)=f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_2), \text{ άρα η } g \searrow \text{ στο } [\alpha,x_2],$$

Για $\alpha < x < x_2 \overset{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(\alpha) \Rightarrow f(x) - f(1) < f(\alpha) - f(1) \quad (1)$

Όμως $1 < \alpha$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, \alpha)$ αφού

$$1 < x < \alpha \overset{f' \searrow [1,\alpha]}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) = 2(1-\alpha) < 0$$

άρα η $f \searrow$ στο $[1, \alpha]$

$$\alpha > 1 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(\alpha) < f(1)$$

Από την (1) έχουμε $f(x) - f(1) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη.

Β΄ τρόπος

Είναι,

$$f(\alpha) < f(1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2\left(e^{1-\alpha} - 1\right) + \alpha^2 - 1 > 0 \text{ που ισχύει}$$

διότι,

$$e^{1-\alpha} > 1 - \alpha + 1 \text{ με } \alpha > 1$$

άρα,

$$e^{1-\alpha} - 1 > 1 - \alpha \Leftrightarrow 2\left(e^{1-\alpha} - 1\right) > 2 - 2\alpha \Leftrightarrow 2\left(e^{1-\alpha} - 1\right) + \alpha^2 - 1 > \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 > 0$$

Γ΄ τρόπος

Το $f(1) = 2e^{1-\alpha} - 1$ όμως, $\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} < 2 \Leftrightarrow f(1) < 1$

αλλά,

$$\alpha < x < x_2 \overset{f \searrow}{\Longleftrightarrow} f(\alpha) > f(x) > f(x_2)$$

Το $f'(x_2) = 0 \Leftrightarrow e^{x_2 - \alpha} = x_2 \;(1)$

Το $f(x_2) = 2e^{x_2-\alpha} - {x_2}^2 \overset{(1)}{=\!=} 2e^{x_2-\alpha} - \left(e^{x_2-\alpha}\right)^2 = e^{x_2-\alpha}\left(2 - e^{x_2-\alpha}\right)$

όμως,

$$x_2 > \alpha \Leftrightarrow x_2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow e^{x_2-\alpha} > 1 \Leftrightarrow -e^{x_2-\alpha} < -1 \Leftrightarrow 2 - e^{x_2-\alpha} < 1 \Leftrightarrow f(x_2) < 1$$

Άρα πρέπει $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ οπότε η $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α, x_2)

Δ΄ τρόπος

Είναι,

$$f(x) = f(1),\; 1 < \alpha < x$$

άρα

$$2e^{x-\alpha} - x^2 = 2e^{x-1} - 1 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2e^{x-1} = x^2 - 1 \;\;(1)$$

Εφόσον $1 < \alpha < x$ η παράσταση $x^2 - 1$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός οπότε από την σχέση (1) οπότε ισοδύναμα,

$$2e^{x-\alpha} - 2e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} > 2e^{x-1} \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > e^{x-1} \Leftrightarrow x - \alpha > x - 1 \Leftrightarrow \alpha > 1 \text{ άτοπο.}$$

Δ4. Η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[2,+\infty\right)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\left(2,f\left(2\right)\right)$ είναι

$$y-f\left(2\right)=f'\left(2\right)\left(x-2\right)\Rightarrow y+2=-2\left(x-2\right)\Rightarrow y=-2x+2$$

Άρα για κάθε $x\geq 2$ έχουμε:

$$f\left(x\right)\geq -2x+2\overset{\sqrt{x-2}\geq 0}{\Rightarrow} f\left(x\right)\sqrt{x-2}\geq -2\cdot\left(x-1\right)\sqrt{x-2}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο στο 2 άρα,

$$\int_2^3 f\left(x\right)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3 -2\left(x-1\right)\sqrt{x-2}dx \quad (1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\int_2^3 -2\left(x-1\right)\sqrt{x-2}dx=-\frac{32}{15}$

Θέτουμε $u=x-2\Rightarrow du=dx$

Για $x=2$ $\quad u=0$

$x=3$ $\quad u=1$

Άρα

$$-2\int_2^3\left(x-1\right)\sqrt{x-2}dx=-2\int_0^1\left(u+1\right)\sqrt{u}du=-2\int_0^1 u\sqrt{u}du-2\int_0^1\sqrt{u}du$$

$$=-2\frac{2}{5}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_0^1-2\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=-\frac{32}{15}$$