ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Β. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α και $x_0 \in A$.
Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 5

*Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις **Γ, Δ, Ε, ΣΤ** και **Ζ** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.*

Γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 2

Δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

Ε. Ισχύει ο τύπος $\int ημx dx = συνx + c$

Μονάδες 2

ΣΤ. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Μονάδες 2

Ζ. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f και C, C΄ οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \ x \le 0 \\ αx + β & , \ 0 < x < 1 \\ 1 + x\ln x & , \ x \ge 1 \end{cases} \qquad \text{όπου } α, β \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα α και β έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 8

β) Αν, για τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ισχύει: α=1 και β=0, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$

Μονάδες 9

ii) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad , \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w = \dfrac{z}{z^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K=\frac{(z_1\cdot z_2)^3-i}{4+(z_1+z_2)^2} \quad .$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ = (0, +∞) για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1}\int_1^x f(t)dt \quad , \ x\in\Delta.$$

α) Να υπολογίσετε το f(1).

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x - 1$.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιό σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Θεωρία από το σχολικό βιβλίο σελ. 304

β) Θεωρία από το σχολικό βιβλίο σελ. 150

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

στ) Λ

ζ) Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) $x \in R$

Για $x \prec 0$ f συνεχής ως πολυωνυμική

Για $0 \prec x \prec 1$ f συνεχής ως πολυωνυμική

Για $x \succ 1$ f συνεχής ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών

Για $x = 1$ ισχύει $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ (f συνεχής στο 1)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + \beta) = a + \beta \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (1 + x\ln x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \alpha + \beta = 1$$

f συνεχής στο 0 άρα ισχύει $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2\right)=0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+\beta)=\beta \\ \\ f(0)=0\end{array}\right\}\quad \beta=0$$

$$a+\beta=1 \overset{\beta=0}{\Longleftrightarrow} \alpha=1$$

β) **i)** Επειδή $x\to+\infty$ $f(x)=1+x\ln x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\ln x}{x^2}\quad \underset{\text{l'hospital}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x\ln x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{2x}\quad \underset{\text{l'hospital}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x+1)'}{(\ 2x\ )'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

ii) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ x & 0\prec x\prec 1\\ 1+x\ln x & x\ge 1\end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1\quad \underset{\text{l'hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{1}+x\ln x-\cancel{1}}{x-1}\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{(x\ln x)'}{(\ x-1\ )'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{1}=\ln 1+1=1$$

ΘΕΜΑ 3^{o}

α) Θα δείξω ότι $w = \overline{w} \Leftrightarrow w \in R$

Θέτω $w = x + yi^{(1)}, x, y \in R, w = \overline{w} \Leftrightarrow \cancel{x} + yi = \cancel{x} - yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} w \in R$

$$w \in R \Leftrightarrow w = \overline{w} \Leftrightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}^2+1} \Leftrightarrow \overline{z}^2 \cdot z + z \Leftrightarrow \overline{z} \cdot z^2 + \overline{z} \Leftrightarrow \overline{z}^2 \cdot z + z - \overline{z} \cdot z^2 - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}\left(\overline{z} - z\right) - \left(\overline{z} - z\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overline{z} - z\right)\left(z \cdot \overline{z} - 1\right) = 0 = \overline{z} - z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in R$$

ή $\overline{z}z - 1 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

β) $\dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3z = \sqrt{3}(z^2+1) \Leftrightarrow \sqrt{3}z^2 - 3z + \sqrt{3} = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9 - 12 = -3 \prec 0$

$$z = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\left(3 + i\sqrt{3}\right)}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt{3} + i \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{\cancel{3}\left(\sqrt{3} + i\right)}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

$$\frac{3 - i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\left(3 - i\sqrt{3}\right)}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt{3} - i \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{\cancel{3}\left(\sqrt{3} - i\right)}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

γ) Από τους τύπους της Vieta έχουμε $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\gamma}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$ και

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3}$$

$$k = \frac{\left(z_1 \cdot z_2\right)^3 - i}{4 + \left(z_1 + z_2\right)^2} = \frac{1^3 - i}{4 + \sqrt{3^2}} = \frac{1 - i}{7} = \frac{1}{7} - \frac{i}{7}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) $$f(x)=x^2-1+\frac{1}{x+1}\int_1^x f(t)dt^{(1)},\ x\in(0,+\infty)$$

Για $x=1$ έχουμε

$$f(1)=\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{1+1}\int_1^1 f(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

β)

$$f'(x)=\left(x^2-1\right)'+\left(\frac{1}{x+1}\right)'\int_1^x f(t)dt+\left(\int_1^x f(t)dt\right)'\frac{1}{x+1}=$$

$$=2x-\frac{1}{(x+1)^2}(x+1)'\int_1^x f(t)dt+f(x)\left(\frac{1}{x+1}\right)\underset{=}{(1)}2x-\frac{1}{(x+1)^2}\int_1^x f(t)dt+$$

$$+\left(x^2-1+\frac{1}{x+1}\int_1^x f(t)dt\right)\frac{1}{x+1}=2x-\cancel{\frac{1}{(x+1)^2}\int_1^x f(t)dt}+\frac{x^2-1}{x+1}+\cancel{\frac{1}{(x+1)^2}\int_1^x f(t)dt}=$$

$$=2x+\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=2x+x-1=3x-1$$

γ) Ισχύει $\int f'(x)dx=f(x)+c$ και $f'(x)=3x-1$ και $f(1)=0$

έχουμε $$\int f'(x)dx=\int (3x-1)dx$$

$$f(x)+c_1=\frac{3x^2}{2}-x+c_2 \qquad c_1,c_2\in R$$

$$f(x)=\frac{3x^2}{2}-x+c_2-c_1$$

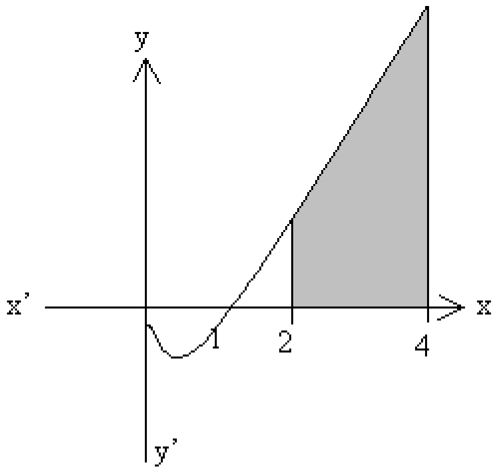
$$f(x)=\frac{3x^2}{2}-x+c \qquad c\in R$$

για $x=1$ έχουμε

$$f(1)=\frac{3}{2}-1+c\Leftrightarrow 0=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow\frac{-1}{2}$$

άρα $\qquad f(x)=\dfrac{3x^2}{2}-x-\dfrac{1}{2}, \qquad x\in(0,+\infty)$

δ) $\quad \mathrm{E}=\int_2^4 |f(x)|\,dx$



$$\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{2}=0$$

$$\Delta=4$$

$$x=\frac{1\pm 2}{3}=1 \text{ ή } -\frac{1}{3}$$

$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$+$		$-$		$+$

άρα στο $[2,4]$ η f δίνει θετικές τιμές

$$E=\int_2^4\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4-\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4-\frac{1}{2}[x]_2^4=\frac{3}{2}\left(\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right)-\frac{1}{2}(4-2)=$$

$$=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{56}{\cancel{3}}-\frac{12}{2}-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 2=28-6-1=27\tau\mu$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 13 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

β) Έστω Μ(x, y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z=x+yi στο μιγαδικό επίπεδο.
Τι ορίζουμε ως μέτρο του z;

Μονάδες 5

γ) *Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς* ***1, 2, 3, 4*** *και* ***5*** *των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη* ***(Σ)****, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή* ***(Λ)****, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Αν z μιγαδικός αριθμός και $\overline{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει

$|z|^2 = z\,\overline{z}$.

Μονάδες 2

2. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 , τότε ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x\to x_0} f(x) \right| .$$

Μονάδες 2

3. Ισχύει $(\eta\mu x)' = -\,\sigma\upsilon\nu x$.

Μονάδες 2

4. Ισχύει $\int e^x dx = e^{2x} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

5. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$z_1 = 3+i$ και $z_2 = 1-3i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{z_1}{z_2} = i$ και $\left| iz_1 + z_2 \right|^2 = 0$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$.

Μονάδες 8

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό

$$w = \frac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2} \quad , \quad k \in \mathbb{R} - \{1\} .$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{R} - \{1\}$ ισχύει $\mathrm{Im}(w) = -1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x , & x \le 0 \\ x \ln x , & x > 0 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R} .$$

Α) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Μονάδες 10

Β) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha = -1$:

i) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

Μονάδες 5

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=e.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \in (1, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 6

β) Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot$$

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2005 έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 6

δ) Έστω $\Pi = \int_2^e f(x)\,dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)\,dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi - 2\ln 2$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Απαντήσεις

Θέμα 1º

α) Θεωρία : σελ. 217

β) Θεωρία : σελ. 97 (Έστω Μ(x,y),…… $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ και σχήμα

γ) 1.Σ, 2.Σ, 3.Λ, 4.Λ, 5.Σ

Θέμα 2º

α) Είναι $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{3+i}{1-3i}=\dfrac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{3+9i+i+3i^2}{1^2-(3i)^2}=\dfrac{3+10i-3}{1+9}=\dfrac{10i}{10}=i$

και $|iz_1+z_2|^2=|i(3+i)+1-3i|^2=|3i+i^2+1-3i|^2=0^2=0$

ή <u>2ος τρόπος:</u>

$|iz_1+z_2|^2=(iz_1+z_2)(\overline{iz_1+z_2})=(iz_1+z_2)(-i\overline{z_1}+\overline{z_2})=-i^2z_1\overline{z_1}+iz_1\overline{z_2}-iz_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=$

¿$|z_1|^2+i(z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1})+|z_2|^2=\sqrt{3^2+1^2}^2+i[(3+i)(1+3i)-(1-3i)(3-i)]+\sqrt{1^2+(-3)^2}^2=$

¿$10+i(3+9i+i-3-3+i+9i+3)+10=20+i(20i)=20+20i^2=0$

β)

$z_1^{2006}+z_2^{2006}=(3+i)^{2006}+(1-3i)^{2006}=\left[(3+i)^2\right]^{1003}+\left[(1-3i)^2\right]^{1003}=$

¿$(9+6i+i^2)^{1003}+(1-6i+9i^2)^{1003}=(8+6i)^{1003}+(-8-6i)^{1003}=$

¿$(8+6i)^{1003}+[-(8+6i)]^{1003}=(8+6i)-(8+6i)^{1003}=0$

γ)

Είναι :

$w=\dfrac{k(3+i)-2(1-3i)}{1-3i-k(1-3i)}=\dfrac{3k+ki-i+3i^2}{(1-3i)(1-k)}=\dfrac{(3k-3)+(k-1)i}{(1-k)(1-3i)}=\dfrac{3(k-1)+(k-1)i}{(1-k)(1-3i)}=$

¿$\dfrac{(k-1)(3+i)}{(k-1)(1-3i)}=-\dfrac{z_1}{z_2}\overset{(a)}{=}-i$

Άρα $I_m(w)=-1$

Θέμα 3ο

$a+e^x, x\leq 0$
$x\ln x, x$
¿
¿
$f(x)=$¿{¿¿¿
¿

A) f συνεχής στο 0 αν και μόνον αν : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to o^+} f(x)=f(0)$

Είναι :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+e^x)=a+e^0=a+1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{dLH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-\frac{x^2}{x})=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

$$f(0)=a+e^0=a+1$$

άρα $\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha=-1$

B) Για $\alpha=-1$ είναι
$-1+e^x, x\leq 0$
$x\ln x, x$
¿
¿
$f(x)=$¿{¿¿¿
¿

i)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1+e^x-0}{x}\overset{dlH}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{(-1+e^x)'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

ii) Για $x\langle 0: f'(x)=(-1+e^x)'=e^x\rangle 0$ άρα η $f\nearrow$ στο $(-\infty,0]$
x

Για ¿$0: f'(x)=(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=1\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$¿

$$\ln x+1=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

χ	$-\infty$	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
f(x)	↗	↘	↗	

στο $(-\infty,0]$ η f ↗

στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ η f ↘

στο $[\frac{1}{e},+\infty)$ η f ↗

iii) Είναι $f(x)=x\ln x$, $x\in[1,e]$ οπότε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$

άρα $E_{(\Omega)}=\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e (\frac{x^2}{2})'\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}(\ln x)'dx=$

$=\left[\frac{e^2\ln e}{2}-\frac{1^2\ln 1}{2}\right]-\int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=$

¿ $\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2})=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2e^2}{4}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}\tau.\mu.$

Θέμα 4ο

$f(x)=x-\ln x+e^x$, $x\in(1,+\infty)$

α) $f'(x)=1-\frac{1}{x}+e^x=\frac{x-1}{x}+e^x$ (γιατί x ¿ $1)$ ¿

¿ 0 ¿

άρα η f ↗ στο $(1,+\infty)$

β)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}(\frac{+\infty}{+\infty})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x+e^x)=\lim_{x\to+\infty}x(1-\frac{\ln x}{x}+\frac{e^x}{x})=(+\infty)(1-0+(+\infty))=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x - \ln x + e^x) = 1 - \ln 1 + e = 1 + e$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

άρα $f(A) = (1+e, +\infty)$. γιατί $f \nearrow$

(σύνολο τιμών $f(A) = (\lim\limits_{x\to 1^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x))$)

και 2005 ¿ $f(A)$ άρα η $f(x) = 2005$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, +\infty)$ που είναι και μοναδική γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα .

δ) άρα η $f \nearrow$ στο $(1, +\infty)$ άρα η f αντιστρέφεται

οπότε : $I = \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)\,dx$

θέτω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$

$dx = f'(u)\,du$

$x = f(2) : u = f^{-1}(f(2)) = 2$

$x = f(e) : u = f^{-1}(f(e)) = e$

άρα $I = \int_2^e u f'(u)\,du = [uf(u)]_2^e - \int_2^e u' f(u)\,du = ef(e) - 2\mathrm{f}(2) - \int_2^e f(x)\,fx =$

$= e(e - \ln e + e^e) - 2(2 - \ln 2 + e^2) - \int_2^e f(x)\,dx$

άρα Π $-2\ln 2 = \int_2^e f(x)\,dx + e(e - 1 + e^e) - 4 + 2\ln 2 - 2e^2 - \int_2^e f(x)\,dx - 2\ln 2 =$

$= e^2 - e + e^{e+1} - 4 + 2\ln 2 - 2e^2 - 2\ln 2 = e^{e+1} - e^2 - e - 4$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. Έστω η συνάρτηση f(x)=ημx. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x)=\text{συν}x$.

Μονάδες 10

2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Β. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1**, **2**, **3**, **4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη **(Σ)**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z και κάθε θετικό ακέραιο ν, ισχύει: $|z|^{\nu}=|z^{\nu}|$.

Μονάδες 2

2. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=1$.

Μονάδες 2

3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 2

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Μονάδες 2

5. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, ισχύει:

$$\int f'(x)dx=-f(x)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=i$, $z_2=1$ και $z_3=1+i$.

α. Να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_3|^2$.

Μονάδες 5

β. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-z_1|=|z-z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. Re (z) = Im (z).

Μονάδες 10

ii. για $z\neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}, \ x \in (0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \quad \text{και} \quad f\left(e^5\right) > 0 \ .$$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο M(1, f(1)).

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα (0, +∞).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$ και f(0) = 2 .

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{-x} f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I(x) = \int_0^x f(t)dt$

Μονάδες 9

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{I(x)}{x^2}$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Α. ΘΕΩΡΙΑ Σελίδα 224 σχολικού βιβλίου

Β. ΘΕΩΡΙΑ Ορισμός Σελίδα 149 σχολικού βιβλίου

Γ. 1.Σ

2.Λ

3.Σ

4.Σ

5.Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $|z_1|=\sqrt{0^2+1^2}=1$ και $|z_2|=\sqrt{1^2+0^2}=1$ και $|z_3|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, οπότε $|z_1|^2+|z_2|^2=1+1=2=|z_3|^2$.

β) i) Έστω $z=x+yi$, οπότε

$|z-z_1|=|z-z_2| \Leftrightarrow |z-i|=|z-1| \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|(x-1)+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=$
$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2 \Leftrightarrow y=x$ Άρα $Re(z)=Im(z)$

ii) Επειδή από το πρώτο ερώτημα ισχύει Re(z)=Im(z), ο μιγαδικός z θα είναι της μορφής $z=x+xi,\ x\neq 0$. Είναι A=

$$\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}=\frac{x+xi}{x-xi}+\frac{x-xi}{x+xi}=\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2+1-2i+i^2}{2}=\frac{0}{2}=0$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $f\left(\frac{1}{e^5}\right)=\ln\frac{1}{e^5}+\frac{1}{4\frac{1}{e^5}}=-5+\frac{e^5}{4}>0$

Επίσης $f\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\frac{1}{4}+\frac{1}{4\frac{1}{4}}=-\ln 4+1=-2\ln 2+1<0$ και

$f\left(e^5\right)=\ln e^5+\frac{1}{4e^5}=5+\frac{1}{4e^5}>0$

β) Για $x=1: f(1)=\ln 1+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^2}$,

οπότε για x=1 : $f'(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{2}{4}\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}.$$

γ) Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^2}=0\Leftrightarrow 4x^2=x\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}4x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

x	0	¼	+∞
f'	-	0	+
f	↘		↗

Είναι η f συνεχής στο $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ και $f'(x)\langle 0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

Είναι η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$ και $f'(x)\rangle 0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$,άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

δ) Είναι η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $f\left(\frac{1}{e^5}\right)\bullet f\left(\frac{1}{4}\right)\langle 0$, οπότε σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση

$f(x)=0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$, η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία το πολύ πραγματική ρίζα στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$, οπότε και στο διάστημα$\left(0,\frac{1}{4}\right]$. Είναι η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $f\left(\frac{1}{4}\right)\bullet f\left(e^5\right)\langle 0$, οπότε σύμφωνα με το θ.Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$ η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία το πολύ πραγματική ρίζα στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$,οπότε και στο διάστημα $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει δυο ακριβώς πραγματικές ρίζες στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Είναι η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα δύο παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων και

$h'(x)=-e^{-x}f(x)+ e^{-x}f'(x)+4e^{-4x}=e^{-x}(f'(x)-f(x))+4e^{-4x}=$

$e^{-x}(-4e^{-3x})+4e^{-4x}=-4e^{-4x}+4e^{-4x}=0$

Άρα η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Για x=0: $h(0)=e^0 f(0)-e^0=1\cdot 2-1=1$. Άρα $h(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

οπότε $e^{-x}f(x)-e^{-4x}=1 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^{-4x}+1}{e^{-x}} \Leftrightarrow f(x)=e^{-3x}+e^{x} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{e^{3x}}+e^{x}$

γ) Είναι $I(x)=\int_0^x f(t)dt$ Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα

ισχύει $I'(x)=f(x)=e^{x}+\dfrac{1}{e^{3x}}$

Οπότε $I(x)=e^{x}-\dfrac{1}{3}e^{-3x}+C$.

Για x=0 ισχύει $I(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$ (1)

και $I(0)=e^0-\dfrac{1}{3}e^0+C \Leftrightarrow I(0)=\dfrac{2}{3}+C$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα ισχύει $\dfrac{2}{3}+C=0 \Leftrightarrow C=-\dfrac{2}{3}$

Άρα $I(x)=e^{x}-\dfrac{1}{3}e^{-3x}-\dfrac{2}{3}$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{2}{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x}}{x^2}-\dfrac{1}{3x^2e^{3x}}-\dfrac{2}{3x^2}\right)$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^{x})'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^{x})'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{2}=+\infty$ Επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x^2e^{3x}}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3x^2}=0$.

Άρα (1) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x^2e^{3x}}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x^2}=+\infty$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0).$$

Μονάδες 10

β. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;

Μονάδες 5

Β. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

2. Κάθε συνάρτηση που είναι 1−1 είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 2

3. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

Μονάδες 2

4. Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|,\ x\in\mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Μονάδες 2

5. Ισχύει: $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$, όπου α, c είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha\neq-1$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z=\frac{1}{1+i}-\frac{i(i-3)}{2}.$$

α. Να αποδείξετε ότι:

$$-\bar{z}=-1+i\,,\quad z^2=2i\,,\quad z^3=-2+2i\,.$$

Μονάδες 9

β. Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $-\bar{z}$, z^2, z^3, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|z^3-z^2\right|^2=\left|z^2+\bar{z}\right|^2+\left|z^3+\bar{z}\right|^2.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{x-\alpha}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(0, f(0)) να είναι παράλληλη στην ευθεία y=ex.

Μονάδες 10

β. Για $\alpha=-1$,

i. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x-1 \text{ και } g(x) = \ln x,\ x>0.$$

α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq g(x), \text{ για κάθε } x>0.$$

Μονάδες 8

β. Αν $h(x) = f(x)-g(x)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι:

$$0 \leq h(x) \leq e-2, \text{ για κάθε } x \in [1, e].$$

Μονάδες 7

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Μονάδες 5

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_1^e e^{h(x)}[h(x)+1]h'(x)dx.$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (*για τους εξεταζόμενους*)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ 2009

ΘΕΜΑ 1^o

Α. α. Θεωρία σελ. 229 σχολικού βιβλίου
 β. Ορισμός σελ. 279 σχολικού βιβλίου

Β. 1. Σ
 2. Λ
 3. Λ
 4. Σ
 5. Σ.

ΘΕΜΑ 2^o

α. Είναι $z=\frac{1}{1+i}-\frac{i(i-3)}{2}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}-\frac{i^2-3i}{2}=\frac{1-i}{2}-\frac{-1-3i}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$

Άρα $-\bar{z}=-(1-i)=-1+i,\ z^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$ και

$z^3=z^2\cdot z=2i(1+i)=2i-2=-2+2i$

β. Είναι $(\mathrm{AB})=\left|-\bar{z}-z^2\right|=|-1+i-2i|=|-1-i|=\sqrt{2}$

$(\mathrm{B\Gamma})=\left|z^2-z^3\right|=|2i+2-2i|=2$

$(\mathrm{A\Gamma})=\left|-\bar{z}-z^3\right|=|-1+i+2-2i|=|1-i|=\sqrt{2}$

Είναι $(\mathrm{AB})=(\mathrm{A\Gamma})$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ. Είναι $\left|z^2+\bar{z}\right|^2=2,\left|z^3+\bar{z}\right|^2=2,\left|z^3-z^2\right|^2=4$ άρα $\left|z^2+\bar{z}\right|^2+\left|z^3+\bar{z}\right|^2=2+2=4=\left|z^3-z^2\right|^2$.

ΘΕΜΑ 3^o

α. Είναι $f'(x)=e^{x-a}+xe^{x-a}$. Για $x=0: f'(0)=e^{-a}$. Είναι $\lambda_\varepsilon=e$

Πρέπει $f'(0)=\lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow -\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -1$.

β. i Είναι $f(x)=xe^{x+1}, x\in\mathbb{R}$, οπότε $f'(x)=e^{x+1}+xe^{x+1}=(1+x)e^{x+1}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow (1+x)e^{x+1}=0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$ αφού $e^{x+1}\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Είναι η f συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$. Είναι η f συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-1$ το $f(-1)=-1$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1}=0$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x+1}\right)\underset{=\!=}{(-\infty)\cdot 0}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x-1}}\underset{=\!=}{\dfrac{-\infty}{+\infty}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x)'}{\left(e^{-x-1}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x-1}}=0$

άρα ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $h(x)=f(x)-g(x)=x-1-\ln x, x>0$

Είναι $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

Είναι $h'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		↘		↗	

οπότε η h παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $h(1)=0$. Άρα
$h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$.

β. i. Είναι η h συνεχής στο $[1,e]$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,e)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,e]$, δηλαδή για $1\leq x\leq e$ θα είναι $h(1)\leq h(x)\leq h(e)\Leftrightarrow 0\leq h(x)\leq e-2$.

ii. Είναι $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$ οπότε

$$\mathrm{E}=\int_1^e h(x)\,dx=\int_1^e (x-1-\ln x)\,dx=\int_1^e x\,dx-\int_1^e dx-\int_1^e \ln x\,dx \quad (1)$$

Είναι $\int_1^e \ln x\,\mathrm{dx}=\int_1^e (x')\ln x\,\mathrm{dx}=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x(\ln x)'\,dx$

$$=[x\ln x]_1^e-\int_1^e dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e=e\ln e-\ln 1-e+1=1.$$

Άρα $(1)\Leftrightarrow \mathrm{E}=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e-[x]_1^e-1=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-e+1-1=\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

iii. Είναι

$$I=\int_1^e e^{h(x)}[h(x)+1]\cdot h'(x)\,dx=\int_1^e \left(e^{h(x)}\right)'[h(x)+1]\,dx=\left[e^{h(x)}(h(x)+1)\right]_1^e-\int_1^e e^{h(x)}(h(x)+1)'\,dx=$$

$$=\left[e^{h(x)}(h(x)+1)\right]_1^e-\int_1^e e^{h(x)}\cdot h'(x)\,dx=$$

$$=\left[e^{h(x)}(h(x)+1)\right]_1^e-\left[e^{h(x)}\right]_1^e=e^{h(e)}(h(e)+1)-e^{h(1)}(h(1)+1)-e^{h(e)}+e^{h(1)}=$$

$$=e^{e-2}(e-2+1)-e^0-e^{e-2}+e^0=e^{e-2}(e+1)-e^{e-2}=e^{e-2}\cdot e=e^{e-1}.$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 14 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = εφx,\ x \in A$,
όπου $A = \mathbb{R} - \{x / συνx = 0\}$
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$(εφx)' = \frac{1}{συν^2 x},\ x \in A$$

Μονάδες 10

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Αν $α > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} α^x = +\infty$

γ) Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ισχύει

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ \ x \in A$$

δ) $\int \eta\mu x dx = \sigma\upsilon\nu x + c,\ c \in \mathbb{R}$

ε) Αν οι συναρτήσεις f΄, g΄ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + \int f'(x)g(x)dx,\ x \in \Delta$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει

$$|z| = |z - 2i|$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = 1$

Μονάδες 7

Β2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$

Μονάδες 10

Β3. Έστω $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -1 + i$ οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β2.

Να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\ln x,\quad x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο άξονας ψ΄ψ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x) = -f(x) + x,\ x\in\mathbb{R} \ \text{ και } \ f(0) = 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = e^{x}\big(f(x) - x + 1\big),\ x\in\mathbb{R}, \text{ είναι σταθερή.}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x} + x - 1, \quad x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = 1$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ 2010

ΘΕΜΑ Α

Α1 Θεωρία σελ. 232 Σχολικού βιβλίου

Α2 Ορισμός σελ 188 Σχολικού βιβλίου

Α3 α-Σ
β-Σ
γ-Σ
δ-Λ
ε-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Είναι $|z|=|z-2i| \Leftrightarrow |z-(0+0i)|=|z-(0+2i)|$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα Α$(0,0)$ και Β$(0,2)$

Έστω

$z=x+yi,\ \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}$

$$|z|=|z-2i| \Leftrightarrow |x+yi|=|x+yi-2i| \Leftrightarrow |x+yi|=|x+(y-2)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+y^2-4y+4 \Leftrightarrow 4y=4 \Leftrightarrow y=1$$

Β2.
Είναι $z = x + i, x \in \mathbb{R}$
Πρέπει $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$
Άρα $z=1+i$ ή $z=-1+i$.

Β3.
Είναι
$z_1^4+z_2^4=(1+i)^4+(-1+i)^4=\left[(1+i)^2\right]^2+\left[(-1+i)^2\right]^2=\left(1+2i+i^2\right)^2+\left(1-2i+i^2\right)^2=(2i)^2+(-2i)^2=$
$=4i^2+4i^2=-4-4=-8.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}$ και
$f''(x)=6x+\frac{3}{x^2}>0$ αφού $x>0$. Είναι η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f''(x)\rangle 0$
για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Γ2.
Είναι: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^3-3\ln x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}x^3-3\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)$
Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$ θα είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$
Άρα η ευθεία $x=0$ δηλαδή ο $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Γ3.
Είναι $f(x)=2\Leftrightarrow f(x)-2=0$
Θέτουμε $g(x)=f(x)-2=x^3-3\ln x-2$
δηλαδή $g(x)=x^3-3\ln x-2$ με $x\in[1,e]$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ g \text{ συνεχής ως άθροισμα συνεχών}\\ \left.\begin{array}{l}\bullet\ g(1)=1-3\ln1-2=-1\langle 0\\ \\ g(e)=e^3-3\ln e-2=e^3-5\rangle 0\end{array}\right\}\Rightarrow g(1)g(e)\langle 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Bolzano $\Rightarrow$ υπάρχει $x_0\in(1,e): g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-2=0$
$\Leftrightarrow f(x_0)=2$ με $x_0\in(1,e)$.
Είναι $g'(x)=f'(x)$. Είναι η f κυρτή στο $(0,+\infty)$, άρα θα είναι κυρτή και στο $[1,\varepsilon]$, οπότε $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$. Είναι η g συνεχής στο $[1,e]$ και

$g'(x)\rangle 0$ για κάθε $x\in[1,e]$άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,e]$, άρα η $g(x)=0$ θα έχει μια το πολύ πραγματική ρίζα στο $[1,e]$. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ ή $f(x)=2$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο $[1,e]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Είναι $g(x)=e^x\left(f(x)-x+1\right), x\in\mathbb{R}$. Είναι η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=e^x\left(f(x)-x+1\right)+e^x\cdot\left(f'(x)-1\right)=$$

$$e^x\left(f(x)-x+\cancel{1}+f'(x)-\cancel{1}\right)=e^x\left(f(x)-x-f(x)+x\right)=e^x\cdot 0=0$$

Άρα $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Δ2.

Η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0: g(0)=e^0\left(f(0)-0+1\right)$ οπότε $g(0)=1$

Αφού g σταθερή στο $\mathbb{R}$ και $g(0)=1$ ισχύει $g(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε:

$$g(x)=e^x\left(f(x)-x+1\right)\overset{g(x)=1}{\Longleftrightarrow}1=e^x\left(f(x)-x+1\right)\Leftrightarrow f(x)-x+1=\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow f(x)=e^{-x}+x-1, x\in\mathbb{R}$$

Δ3.

$f(x)=e^{-x}+x-1, x\in\mathbb{R}.$

Είναι η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-e^{-x}+1=1-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^x-1}{e^x}$

Είναι $f'(x)\rangle 0\Leftrightarrow\dfrac{e^x-1}{e^x}\rangle 0\overset{e^x\rangle 0}{\Longleftrightarrow}e^x-1\rangle 0\Leftrightarrow e^x\rangle 1\Leftrightarrow e^x\rangle e^0\overset{e^x\uparrow}{\Longleftrightarrow}x\rangle 0.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	ελαχ.	$\nearrow$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=e^0+0-1=0$ δηλαδή $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ4.

Είναι $f(0)=0,$ οπότε η $f(x)=0$ έχει προφανή ρίζα τη $x=0$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, η $f(x)=0$ θα έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty,0]$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, η $f(x)=0$ θα έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$. Άρα η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$.

Είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$

Οπότε $$E=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(e^{-x}+x-1\right)dx=\left[-e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1=-e^{-1}+\frac{1}{2}-1+1=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$$
τ.μ.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^{\nu})} = \left(\overline{z}\right)^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

β. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η ho(gof), τότε ορίζεται και η (hog)of και ισχύει ho(gof) = (hog)of

γ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x - 1}{x} = 1$

δ. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ ∈Δ, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

ε. Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω $w = z + \frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει w=2

Μονάδες 6

Β2. Αν $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ και $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β1, τότε να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

Μονάδες 6

Β3. Αν z_1 και z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 , z_2 και $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Μονάδες 8

Β4. Αν $|z| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x+1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

$$xf'(x) < f(x) + \ln 2 \text{ , για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2\int_0^x f(t)\,dt = \left(\ln(x+1)\right)^2 \text{ , } x > -1$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, $x > -1$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^e \le e^{x+1} \text{ , για κάθε } x > -1$$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = e-1$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow f(x) = f(1)\ ,\quad x > -1$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x+1)^2 = 2^{x+1}\ ,\quad x > -1$$

έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις x=1 και x=3

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ 2011

ΘΕΜΑ Α

Α1.
Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 217

Α2.
Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 273

Α3.
α. **Σ**, β. **Σ**, γ. **Λ**, δ. **Σ**, ε. **Λ**

ΘΕΜΑ Β

$$w = z + \frac{4}{z}, \quad z \neq 0$$

Β1.
$w = 2 \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 16 = -12 \langle 0$

$z_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{3}\right)}{2}$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \qquad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

B2.

$$z_1^3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot i\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot\left(i\sqrt{3}\right)^2+\left(i\sqrt{3}\right)^3=$$
$$=1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i=-8.$$

Ομοίως: $z_2^3=\left(1-i\sqrt{3}\right)^3=1^3-3\cdot 1^2\cdot i\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot\left(i\sqrt{3}\right)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^3=$
$$=1-3\sqrt{3}i-9+3\sqrt{3}i=-8.$$

Άρα: $z_1^3=z_2^3=-8$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

$z^2-2z+4=0$

$z^3-2z+4z=0$

$z^3=2z^2-4z=2\left(z^2-2z\right)=2\cdot(-4)=-8$

B3.

Έστω $A\left(1,\sqrt{3}\right)$ η εικόνα του z_1

$B\left(1,-\sqrt{3}\right)$ η εικόνα του z_2

$z_3=\dfrac{z_1^3}{4}=\dfrac{-8}{4}=-2\quad \Gamma(-2,0)$ η εικόνα του z_3.

$(AB)=|z_1-z_2|=\left|1+i\sqrt{3}-\left(1-i\sqrt{3}\right)\right|=\left|2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}\cdot|i|=2\sqrt{3}$

$(A\Gamma)=|z_1-z_3|=\left|1+i\sqrt{3}-(-2)\right|=\left|3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3^2+\sqrt{3^2}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$

$(B\Gamma)=|z_2-z_3|=\left|1-i\sqrt{3}-(-2)\right|=\left|3-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Άρα $(AB)=(A\Gamma)=(B\Gamma)=2\sqrt{3}$ δηλαδή $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισόπλευρο.

B4.

$$|z|=2\Leftrightarrow |z|^2=4\Leftrightarrow z\bar{z}=4\Leftrightarrow \begin{cases}\bar{z}=\dfrac{4}{z}\\[2ex] z=\dfrac{4}{\bar{z}}\end{cases}$$

<u>Είναι:</u> $\bar{w}=\overline{\left(z+\dfrac{4}{z}\right)}=\bar{z}+\overline{\left(\dfrac{4}{z}\right)}=\bar{z}+\dfrac{4}{\bar{z}}=$

$=\bar{z}+\dfrac{4}{\bar{z}}=\dfrac{4}{z}+\dfrac{4}{\frac{4}{z}}=\dfrac{4}{z}+z=w$

δηλαδή $\bar{w}=w$ άρα $w\in\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = x - \ln\left(e^x + 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1}\left(e^x + 1\right)' = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$f''(x) = \frac{(1)' \cdot \left(e^x + 1\right) - 1 \cdot \left(e^x + 1\right)'}{\left(e^x + 1\right)^2} = \frac{-e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$$

Γ1.

<u>Είναι:</u> $f'(x) = \frac{1}{e^x + 1} \rangle\ 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $e^x \rangle\ 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2.

<u>Είναι:</u> $f''(x) = -\frac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} \ \langle\ 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $e^x \rangle\ 0$ και $\left(e^x + 1\right)^2 \ \rangle\ 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα f κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ3.

$xf'(x) \ \langle\ f(x) + \ln 2, \quad \mathrm{x}\rangle 0$

$\Leftrightarrow xf'(x) - f(x) - \ln 2 \ \langle\ 0, \quad \mathrm{x}\rangle 0.$

<u>Έστω:</u> $g(x) = xf'(x) - f(x) - \ln 2$ με $x \geq 0.$

Οι f, f' ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής για $x \geq 0$ αφού οι f', f είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$.

Η g παραγωγίσιμη για $x \geq 0$ αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$g'(x) = (x)' f'(x) + x\left(f'(x)\right)' - f'(x) - (\ln 2)'$

$= f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x)$ αλλά $f''(x)\langle 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και για $x \geq 0$.

Οπότε $g'(x) \leq 0$ για κάθε $x \geq 0$ δηλαδή $g \searrow$

Οπότε $g \searrow$ για $x\rangle 0$ δηλαδή $g(x)\langle g(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xf'(x) - f(x) - \ln 2\langle 0$ για κάθε $x\rangle 0$

$\Leftrightarrow xf'(x)\langle f(x) + \ln 2$ για κάθε $x\rangle 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Αφού f συνεχής για $x\rangle -1$ η $\int_0^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη, όπως και η $\left(\ln(x+1)\right)^2$ είναι παραγωγίσιμη για $x\rangle -1$.

Δ1.

<u>Οπότε:</u> $\left(2\int_0^x f(t)\,dt\right)' = \left(\left(\ln(x+1)\right)^2\right)'$ για $x\rangle -1$.

$$2f(x) = 2\ln(x+1)\cdot\left(\ln(x+1)\right)'$$

$$2f(x) = 2\ln(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}(x+1)'$$

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \text{ για } x\rangle -1.$$

Δ2.

Η f είναι συνεχής για $x\rangle -1$ ως πηλίκο συνεχών.

f παραγωγίσιμη για $x\rangle -1$ με:

$$f'(x) = \frac{\left(\ln(x+1)\right)'\cdot(x+1) - \ln(x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}, \quad x\rangle -1.$$

<u>Έστω:</u> $f'(x)\rangle 0 \overset{(x+1)^2\rangle 0}{\Leftrightarrow} 1-\ln(x+1)\rangle 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x+1)\langle 1 \Leftrightarrow \ln(x+1)\langle \ln e \overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x+1\langle e \Leftrightarrow x\langle e-1.$

x	$-\infty$ $\quad$ -1		$e-1$	$+\infty$
f'		+	0	-
f		↗		↘

<u>Άρα:</u> f ↗ όταν $x\in(-1,e-1]$ και ↘ όταν $x\in[e-1,+\infty)$ για $x=e-1$ η f έχει μέγιστη τιμή την $f(e-1)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$ δηλαδή $f(x)\le\frac{1}{e}$ για κάθε $x\rangle -1$

Θέλω να δείξω ότι: $(x+1)^e \le e^{x+1}$ για κάθε $x\rangle -1$

$\overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln(x+1)^e \le \ln e^{x+1}$ για κάθε $x \rangle -1$

$\Leftrightarrow e\ln(x+1) \le (x+1)\ln e$ για κάθε $x \rangle -1$

$\overset{e(x+1)\rangle 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \le \dfrac{1}{e}$ για κάθε $x \rangle -1$

$\Leftrightarrow f(x) \le \dfrac{1}{e}$ για κάθε $x \rangle -1$ που ισχύει όπως δείξαμε πιο πάνω.

Δ3.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln 1$

$\Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ δεκτή αφού $x \rangle -1$

<u>Άρα:</u> $\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^{e-1} |f(x)| dx$

Για $x \in [0, e-1]$ $f \uparrow$ άρα $0 \le x \le e-1$

$$f(0) \le f(x) \le f(e-1)$$

$$0 \le f(x).$$

Άρα $f(x) \ge 0$ για $x \in [0, e-1]$

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^{e-1} \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{2}\int_0^{e-1} \left[\left(\ln(x+1)\right)^2\right]' dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln^2(x+1)\right]_0^{e-1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\ln^2 e - \ln^2 1\right) = \frac{1}{2}$$ τ.μ.

Δ4.

<u>Είναι:</u> $f(x) = f(1) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \dfrac{\ln(1+1)}{1+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln(x+1) = (x+1)\ln 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x+1)^2 = \ln 2^{x+1} \Leftrightarrow$ (Η $\ln x$ είναι "$1-1$")

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 2^{x+1}$

<u>Οπότε:</u> $(x+1)^2 \Leftrightarrow f(x) = f(1), \quad x \rangle -1$

Αφού ισχύει η παραπάνω ισοδυναμία, οι δυο εξισώσεις $(x+1)^2 = 2^{x+1}$ και $f(x) = f(1)$, είναι ισοδύναμες για $x \rangle -1$ δηλαδή έχουν τις ίδιες λύσεις.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει ακριβώς δυο λύσεις τις $x=1$ και $x=3$.

Για $x=1$: $f(1)=f(1)$ ισχύει, άρα το $x=1$ είναι λύση εξίσωσης.

Για $x=3$: $f(3)=f(1)\Leftrightarrow \dfrac{\ln(3+1)}{3+1}=\dfrac{\ln(1+1)}{1+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{2}\ln 2}{\cancel{4}_2}=\dfrac{\ln 2}{2}$ που ισχύει άρα το $x=3$ είναι λύση της εξίσωσης.

Το $x=1$ ανήκει στο $(-1,e-1]$, όπου η f είναι $\nwarrow$ και συνεχής, άρα το $f(x)=f(1)$ ισχύει μόνο για $x=1$.

Το $x=3$ ανήκει στο $(e-1,+\infty]$, όπου η f είναι $\searrow$ και συνεχής, άρα το $f(x)=f(1)$ ισχύει μόνο για $x=3$.

Οπότε η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x=1$ και $x=3$ άρα και η $(x+1)^2=2^{x+1}$ έχει και αυτή ακριβώς δυο ρίζες τις $x=1$ και $x=3$.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $z\in\mathbb{C}$, τότε $z-\bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$

β. Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$

γ. Ισχύει $(\varepsilon\varphi x)'=-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x\in\mathbb{R}-\{x/\sigma\upsilon\nu x=0\}$

δ. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$|iz-1|=1$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Κ (0, –1) και ακτίνα ρ=1

Μονάδες 9

Β2. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$

Μονάδες 8

Β3. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ και Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ, όπου Κ(0, –1), είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x}-2x$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια ρίζα, το 0

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=1$ και $x=1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=2$
- $f(0)=2$ και
- η f' είναι γνησίως αύξουσα

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(2)=f'(2)=2$

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,\ 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,\ f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq f(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 4

Δ4. Αν επιπλέον δίνεται ότι $f(\xi)>0$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^2-2x,\ \ x\in\mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 224

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Α3.
α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. 1^{ος} τρόπος

$$|iz-1|=1 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |i(x+yi)-1|=1 \Leftrightarrow$$

$$|-y-1+xi|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(-y-1)^2+x^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(-y-1)^2+x^2}^{\,2}=1^2 \Leftrightarrow (-y-1)^2+x^2=1 \Leftrightarrow$$

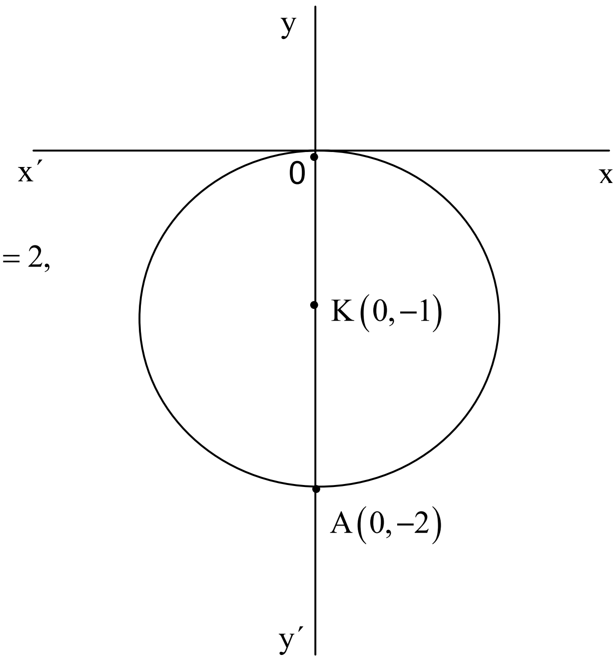
$x^2+(y+1)^2=1,$ άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho=1.$

2^{ος} τρόπος

$$|iz-1|=1 \Leftrightarrow |iz+i^2|=1 \Leftrightarrow |i(z+i)|=1 \Leftrightarrow$$

$|i|\cdot|z+i|=1 \Leftrightarrow |z+i|=1,$ άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho=1.$

B2.



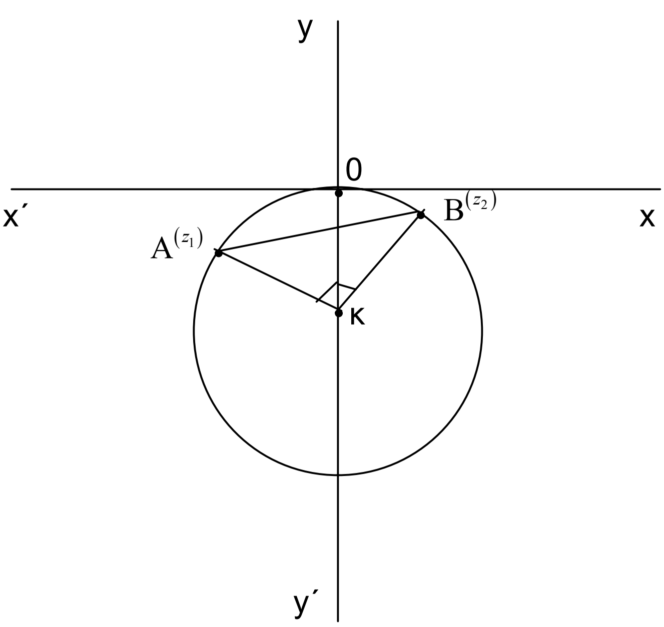
$|z|_{\max} = (OA) = 2,$
άρα $|z| \le 2$

B3.

$(\mathrm{AB})^2 = |z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

$(\mathrm{KA})^2 + (\mathrm{KB})^2 = \rho^2 + \rho^2 = 1 + 1 = 2$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι το τρίγωνο $\mathrm{K}\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ είναι ορθογώνιο στο K.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f'(x)=\left(e^{2x}-2x\right)'=2\cdot e^{2x}-2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{2x}=2\Leftrightarrow e^{2x}=1$

$\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$, την τιμή $f(0)=1$

Γ2.

$f''(x)=\left(2e^{2x}-2\right)'=4e^{2x}\rangle 0,$ άρα η f είναι κυρτή.

Γ3.

Προφανής ρίζα το 0, αφού $f(0)=1$

για $x\langle 0\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}f(x)\rangle f(0)\Leftrightarrow f(x)\rangle 1$

για $x\rangle 0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)\rangle f(0)\Leftrightarrow f(x)\rangle 1$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

Γ4.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ είναι η $y=1$.

Η f είναι κυρτή.

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα

$f(x)\geq 1\Leftrightarrow e^{2x}-2x-1\geq 0$

Άρα $\mathrm{E}=\int_0^1\left[f(x)-1\right]dx=\int_0^1\left[e^{2x}-2x-1\right]dx=$

$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}-x^2-x\right]_0^1=\frac{e^2}{2}-2-\frac{1}{2}$$

άρα $\mathrm{E}=\dfrac{e^2-5}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-2}{x-2}$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=2$

Είναι $f(x)=(x-2)\cdot\varphi(x)+2$

- $f(2)\overset{f\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}\lim\limits_{x\leftarrow 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[(x-2)\varphi(x)+2\right]$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left[(x-2)\varphi(x)\right]+2=0\cdot 2+2=2$

Άρα $f(2)=2$

- $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=2$

Δ2.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$
- $f(0)=f(2)=2$

Από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα το ξ είναι μοναδικό. Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Δ3.

Η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα η f είναι κυρτή. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = \xi$ είναι η $y = f(\xi)$.
Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq f(\xi)$

Δ4.

Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt - x^2 + 2x$ όπου $x \in \mathbb{R}$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ως πράξεις συνεχών
- Η $g(1) = 1 \rangle 0$
- Και $g(0) = \int_1^0 f(t)\,dt = -\int_0^1 f(t)\,dt$

« Έχω $f(x) \geq f(\xi) \rangle 0,$ στο $[0,1]$ άρα $\int_0^1 f(t)\,dt \rangle 0 \Leftrightarrow -\int_0^1 f(t)\,dt \langle 0$»
Επομένως, $g(0) \cdot g(1) \langle 0$
Από το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
Επομένως, η εξίσωση $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει:

$$|z_1 \; z_2| = |z_1| \; |z_2|$$

Μονάδες 10

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί με $z_1 \neq z_2$, τότε η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$

β Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

γ. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$

δ. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε. Αν $f : [\alpha, \beta] \to R$ είναι συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{2}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$, εκτός από ένα σημείο του (μονάδες 7). Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού (μονάδες 2).

Μονάδες 9

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος Β1, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1+z_2-4|\le 2$$

Μονάδες 8

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1, να βρεθούν εκείνοι για τους οποίους ισχύει:

$$|z|=\sqrt{5}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{2}\ell n^2x+x,\quad x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό α τέτοιο, ώστε στο διάστημα $(\alpha,\alpha+1)$ η εξίσωση

$$f(x^4+2x)=f(4)$$

να έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Μονάδες 9

Γ3. Να λύσετε στο διάστημα $(0,+\infty)$ την ανίσωση

$$x\,\ell n^2x<2-2x$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$3\int_1^x 2\,t f(t)dt + x^3 = 3x^2 f(x) + 3x - 8, \quad x>0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}, \quad x>0$$

(μονάδες 3) καθώς επίσης ότι η ευθεία με εξίσωση $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ασύμπτωτη ($y=x$) της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$f'(x)>\frac{f(x)-2}{x-1} \quad \text{για κάθε } x>1$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Απαντήσεις στα θέματα των Εισαγωγικών Εξετάσεων

τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού και

τέκνων Ελλήνων Υπαλλήλων στο εξωτερικό 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 98

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.192

Α3.
α. Σ
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{2}$$

Θέτω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{x+yi-1}=\frac{x-1-yi}{(x-1)^2+y^2}=$$

$$\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}-i\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}.$$

Αφού $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{2}$

Έχουμε $\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}=\frac{1}{2}.$

$$(x-1)^2+y^2=2x-2$$

$$x^2-2x+1+y^2-2x+2=0$$

$$x^2+y^2-4x+3=0 \qquad (1)$$

$$A=-4$$

$$B=0$$

$$\Gamma=3$$

$$A^2+B^2-4\Gamma=16-12=4>0$$

Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},\frac{-B}{2}\right)$ δηλαδή $K(2,0)$ και

ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=\frac{2}{2}=1$

δηλαδή: $C:(x-2)^2+y^2=1$

χωρίς το σημείο $A(1,0)$

αφού $\begin{matrix} z-1\neq 0 \\ z\neq 1\end{matrix}$

δηλαδή $(x,y)\neq(1,0)$

B2.

Οι εικόνες των z_1,z_2 κινούνται στον κύκλο $|z-2|=1$ δηλαδή

$$|z_1-2|=1\;\&\;|z_2-2|=1$$

$$|z_1+z_2-4|=|z_1+z_2-2-2|=|(z_1-2)+(z_2-2)|\overset{\text{τριγ.ανισ.}}{\leq}|z_1-2|+|z_2-2|$$

Άρα $|z_1+z_2-4|\leq 2$.

B3.

Οι μιγαδικοί z κινούνται στον κύκλο $|z-2|=1$ άρα $(x-2)^2+y^2=1 \quad (1)$

$|z|=\sqrt{5}$ Θέτω $z=x+yi \quad x,y\in\mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$

$x^2+y^2=5 \Leftrightarrow y^2=5-x^2 \quad (2)$

Λύνουμε το σύστημα των $(1)\&(2)$

$(x-2)^2+5-x^2=1\Leftrightarrow$

$\cancel{x}^2-4x+4+5-\cancel{x}^2=1\Leftrightarrow$

$-4x=-8\Leftrightarrow x=2$

για $x=2$

$y^2=5-4=1$

$y^2=1$

$\Leftrightarrow y=\pm1$

άρα $z=2+i, \quad z=2-i$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x)=\frac{x}{2}\ln^2 x+x, \quad x>0.$

$Df=(0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+\frac{\cancel{x}}{\cancel{2}}\cancel{2}\ln x\frac{1}{\cancel{x}}+1$

$=\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+1$

$\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{2}>0$

άρα η f γνησίως αύξουσα.

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+1\right)'$$

$$=\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\ln x\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{\ln x+1}{x}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0$$

$$\ln x=-1$$

$$\ln x=\ln e^{-1}$$

$$x=e^{-1}$$

$$x=\frac{1}{e}$$

		0		$1/e$	
$f''(x)$			-	0	+
$f(x)$			κοίλη		κυρτή

Σ.Κ.

Η f είναι κοίλη στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και η f κυρτή στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Γ2.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και "$1-1$".

$$f\left(x^4+2x\right)=f(4)\overset{f:"1-1"}{\Leftrightarrow}$$

$$x^4+2x=4$$

$$x^4+2x-4=0$$

Θεωρώ $g(x)=x^4+2x-4$

g συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική

$g(1)=1+2-4=-1<0$

$g(2)=2^4+2\cdot 2-4=16>0$

$g(1)g(2)<0.$

Από το Θεώρημα Bolzano η $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$,

άρα $\alpha=1$.

$\alpha=1$ μοναδική ρίζα αφού $g'(x)=4x^3+2>0,\ \ x>0$

Άρα η g γνησίως αύξουσα

Γ3.

$$x\ln^2 x < 2-2x$$
$$\Leftrightarrow x\ln^2 x < 2(1-x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x\ln^2 x}{2} < 1-x$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}\ln^2 x + x < 1$$
$$\Leftrightarrow f(x) < f(1)$$
$$\overset{f \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \quad x<1$$

δηλαδή $0<x<1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$3\int_1^x 2tf(t)dt + x^3 = 3x^2f(x) + 3x - 8 \quad (1)$$

$$x>0$$

$$3\int_1^x 2tf(t)dt + x^3 - 3x + 8 = 3x^2f(x)$$

$$f(x) = \frac{3\int_1^x 2tf(t)dt + x^3 - 3x + 8}{3x^2}$$

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$

Η συνάρτηση $g(t) = 2tf(t)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η συνάρτηση $\int_1^x 2tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$.

Οι συναρτήσεις x^3-3x+8 & $3x^2$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις άρα η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζω την (1)

$$3\cdot 2xf(x)+3x^2=6xf(x)+3x^2f'(x)+3$$
$$6xf(x)+3x^2=6xf(x)+3x^2f'(x)+3$$
$$3x^2-3=3x^2f'(x)$$
$$x^2-1=x^2f'(x)$$
$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$$
$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}.$$

Δ2.

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$$
Από τις Συνέπειες Θ.Μ.Τ.
$$f(x)=x+\frac{1}{x}+C.$$
Θέτω στη σχέση (1) για $x=1$
$$3\int_1^1 2tf(t)dt+1=3f(1)+3-8$$
$$1=3f(1)-5$$
$$6=3f(1)$$
$$f(1)=2$$
$$\Leftrightarrow 1+1+C=2$$
$$\Leftrightarrow C=0$$

Άρα $f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x},\ \ x>0$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}\frac{-x^2}{x}\right]$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

άρα $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$.

Δ3.

$x = 1,\ x = e^2$

$$f(x) - x = \frac{x^2+1}{x} - x = \frac{x^2+1-x^2}{x} = \frac{1}{x} > 0,$$

$$x > 0$$

$$\in(\Omega) = \int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1$$

$$= 2\ln e = 2 \cdot 1 = 2\tau.\mu.$$

Δ4.

$$f'(x) > \frac{f(x)-2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > \frac{f(x)-2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > \frac{\frac{x^2+1}{x}-2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > \frac{\frac{x^2+1-2x}{x}}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > \frac{x^2-2x+1}{x^2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > \frac{(x-1)^2}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > \frac{x-1 \cdot x^2}{x} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 1 > x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

<u>Ισχύει</u>

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 5

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 10

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

β. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

γ. Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε ισχύει πάντοτε $f\circ g=g\circ f$.

δ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}_2=\mathbb{R}-\{x|\eta\mu x=0\}$ ισχύει $(\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Αν ο μιγαδικός αριθμός z είναι ρίζα της εξίσωσης $3x^2 + \alpha x + 3 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ με $-6 < \alpha < 6$, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε την ισότητα $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ (6 μονάδες) και να την ερμηνεύσετε γεωμετρικά (4 μονάδες).

Μονάδες 10

Β3. Αν επιπλέον $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

Γ1. Να βρείτε τις οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f, εάν υπάρχουν.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Μονάδες 9

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e$, $x = 2e$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = 2x e^{-x} - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(1) = e^{-1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = 2e^{x-2}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

Δ4. Δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(-1, f(-1))$ και να αποδείξετε ότι

$$f(x) + 2e + 3ex \geq 0 \text{ για κάθε } x \leq 0.$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ