

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα n_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , όπου $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 4

A2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) .

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \dots\dots\dots$, με $x \neq 0$.

β. $(x^v)'$ =....., όπου v φυσικός αριθμός.

γ. $(c \cdot f(x))'$ =....., όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + 2$, όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

B1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 5

B2. Για $a = 3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

B3. Για $a = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

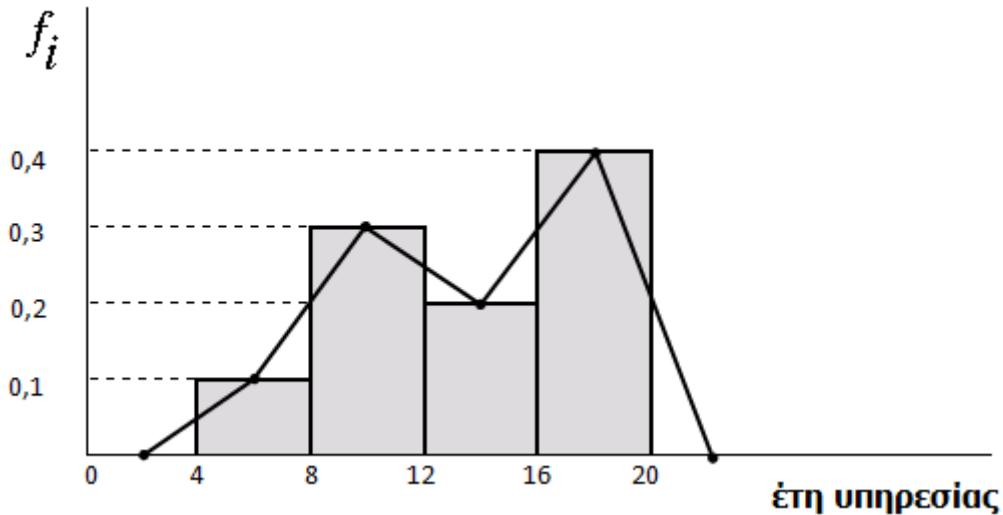
Μονάδες 7

B4. Για $a = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	a_i
[4,8)		5		36°
[8,12)				
[12,16)	14			
[16,20)		20		144°
Σύνολο		50		360°

όπου a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 12

Γ2. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Μονάδες 4

Δ4. Δύο οικόπεδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη $x_A = 29,5\text{m}$ και $x_B = 34,2\text{m}$, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 65

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 28

A3.

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

A4.

α. $-\frac{1}{x^2}$

β. $v \cdot x^{v-1}$

γ. $c \cdot f'(x)$

ΘΕΜΑ Β

B1. Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει στον άξονα στο $x = 1$ ισχύει

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

B2. Για $a = 3$ η συνάρτηση γράφεται: $f(x) = x^2 - 3a + 2$ και για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g λύνουμε:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0$. Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
ή $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

B3. Για τον υπολογισμό του ορίου έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

B4. Είναι $f(0) = 2$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2x - 3$, άρα $f'(0) = -3$

Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = -3x \Leftrightarrow y = -3x + 2.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τις τεταγμένες του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων συμπληρώνουμε την αντίστοιχη στήλη. Επίσης οι κεντρικές τιμές κάθε κλάσης προκύπτουν ως το ημίαθροισμα των άκρων αυτής: $x_i = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $i = 1, 2, 3, 4$ για κάθε κλάση $[\alpha, \beta)$.

Αντίστοιχα, από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = f_i \cdot v$ υπολογίζουμε τις συχνότητες της κάθε κλάσης.

Τέλος, από τον τύπο $a_i = 360^0 \cdot f_i$ συμπληρώνουμε την τελευταία στήλη.

	x_i	v_i	f_i	a_i
[4, 8)	6	5	0,1	36^0
[8, 12)	10	15	0,3	108^0
[12, 16)	14	10	0,2	72^0
[16, 20)	18	20	0,4	144^0
Σύνολο		50	1	360^0

Γ2. Το πλήθος των εκπαιδευτικών που έχουν τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας είναι $n = v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 20 = 45$

Γ3. Λιγότερο από 16 έτη υπηρεσίας έχουν συμπληρώσει:

$$f\% = f_1\% + f_2\% + f_3\% = 10\% + 30\% + 20\% = 60\% \text{ των εκπαιδευτικών}$$

Γ4. Το εμβαδό του χωρίου που σχηματίζεται κάτω από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα (θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.74) ισούται με 1.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τις διαστάσεις του ορθογωνίου οικοπέδου ισχύει: $x > 0, y > 0$.

Η περίμετρος του δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 2y \Leftrightarrow 80 = 2x + 2y \Leftrightarrow x + y = 40$.

$$\text{Δηλαδή } y = 40 - x, \quad (1)$$

Συνεπώς ισχύει: $0 < x < 40$ και $0 < y < 40$.

Το εμβαδό του οικοπέδου δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = x \cdot y = x \cdot (40 - x) = -x^2 + 40x, \quad 0 < x < 40$$

Το πεδίο ορισμού της $E(x)$ είναι το διάστημα $\Delta = (0, 40)$.

Δ2. Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $E'(x) = -2x + 40$.

Λύνουμε: $E'(x) > 0, x \in \Delta$

$$\Rightarrow -2x + 40 > 0 \Rightarrow 0 < x < 20,$$

και $E'(x) < 0, x \in \Delta$



$$\Rightarrow -2x + 40 < 0 \Rightarrow x > 20, \quad x \in \Delta, \text{ άρα } 20 < x < 40.$$

Άρα, η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 20]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[20, 40)$.

Δ3. Λύνουμε: $E'(x) = 0, x \in \Delta$

$$\Rightarrow -2x + 40 = 0 \Rightarrow x = 20$$

Επομένως, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας ακροτάτων

x	0	20	40
$E'(x)$	+	0	-
E		Ο.Μ.	

Η συνάρτηση $E(x)$ παρουσιάζει στο σημείο $x = 20$ (m) ολικό μέγιστο την τιμή

$$E(20) = -20^2 + 40 \cdot 20 = -400 + 800 = 400 \text{ (} m^2 \text{)}$$

Δ4. Για τις διαστάσεις των οικοπέδων A και B παρατηρούμε ότι: $x_A < x_B$ ($29,5 \text{ m} < 34,2 \text{ m}$) και $x_A, x_B \in [20, 40)$ στο οποίο η συνάρτηση E είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Δηλαδή: } x_A < x_B \Leftrightarrow E(x_A) > E(x_B)$$

Άρα το οικόπεδο A έχει μεγαλύτερο εμβαδό από το οικόπεδο B .