

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = 2x$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων.

**Μονάδες 6**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

**β.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

**γ.** Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

**Μονάδες 6**

**A4.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

**α.**  $(\sqrt{x})' = \dots$

**β.**  $(f(g(x)))' = \dots$

**Μονάδες 6**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΘΕΜΑ Β**

Κατά τον μήνα Νοέμβριο οι απουσίες πέντε (5) μαθητών ήταν:  
25, 10, 5, 20, 15.

**B1.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  (μον.4) και το εύρος (μον. 3) του παραπάνω δείγματος των πέντε μαθητών.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να υπολογίσετε τη διακύμανση  $s^2$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος (μον. 6) και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές απαντώντας αιτιολογημένα (μον. 5).

**Μονάδες 11**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1$ , όπου  $x, \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Αν ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  για  $x = 1$  είναι ίσος με 0, να δείξετε ότι  $\alpha = 15$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Για  $\alpha = 15$  να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(2, f(2))$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Για  $\alpha = 15$  να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f(x)$  ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και τα ακρότατα (μον. 2).

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Για  $\alpha = 15$  να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

**Δ1.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (μον. 2) και να υπολογίσετε την παράγωγο  $f'(x)$  (μον. 4).

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Υποθέτουμε ότι ο χρόνος επιστροφής, σε λεπτά, από το σχολείο στο σπίτι για τους μαθητές μίας περιφέρειας ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} \quad , \quad s = \frac{1}{2f'(1)}$$

αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι  $\bar{x} = 9$  και  $s = 2$ .

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Αν το πλήθος των μαθητών της περιφέρειας είναι 2000, πόσοι από αυτούς έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά (μον. 6) και πόσοι πάνω από 15 λεπτά (μον. 3);

**Μονάδες 9**

**Δ4.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, στην περίπτωση που ο χρόνος επιστροφής των μαθητών της περιφέρειας αυξηθεί κατά 3 λεπτά.

**Μονάδες 4**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

*(Ενδεικτικές Απαντήσεις)*

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σελίδα 28

**A2.** Σελίδα 87

**A3.**

α. ΛΑΘΟΣ

β. ΣΩΣΤΟ

γ. ΛΑΘΟΣ

**A4.**

α.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

β.  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{v} = \frac{5+10+15+20+25}{5} = \frac{75}{5} = 15$

$R = t_{\max} - t_{\min} = 25 - 5 = 20$

**B2.**  $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{(5-15)^2 + (10-15)^2 + (15-15)^2 + (20-15)^2 + (25-15)^2}{5} = \frac{250}{5} = 50$

**B3.**  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cong 0,47$

Εφόσον  $CV \geq 0,1$  το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με  $f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha$   
Εφόσον ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  για  $x=1$  είναι ίσος με 0 ισχύει:

$$f'(1) = 0,$$

Επομένως

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow 3 - 18 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -15 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$$

**Γ2.**  $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$ ,  $f'(2) = -9$ ,  $f(2) = 3$

$\lambda = f'(2) = -9$  η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής  $y = \lambda x + \beta$ , αφού  $\lambda = -9$   
επομένως

$$\varepsilon: y = -9x + \beta$$

το  $M(2, f(2))$  το οποίο ανήκει στην ευθεία την επαληθεύει επομένως

$$3 = -9 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 21$$

άρα η ευθεία που προκύπτει είναι η  $\varepsilon: y = -9x + 21$

**Γ3.**  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 5)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } x = 1$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

Για  $x \in (-\infty, 1]$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα

Για  $x \in [1, 5]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα

Για  $x \in [5, +\infty)$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα

Για  $x=1$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$$f(1) = 1 - 9 + 15 + 1 = 8$$

Για  $x=5$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 1 = 125 - 225 + 75 + 1 = -24$$

$$\Gamma 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-18x+15}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-5)}{x+1} = \frac{-12}{2} = -6$$

### ΘΕΜΑ Δ

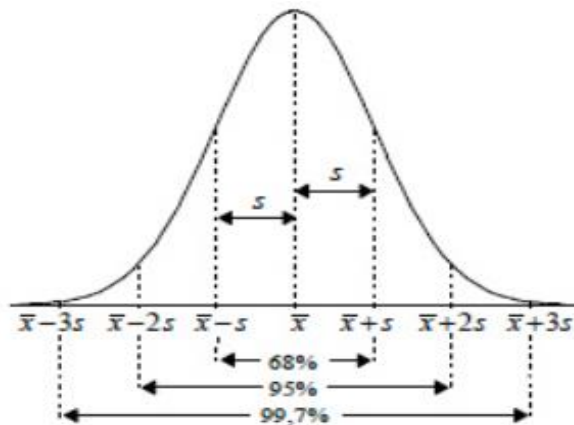
Δ1. Για να ορίζεται η συνάρτηση  $f$  πρέπει  $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ , επομένως  
 $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Delta 2. f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}, f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } \bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9, s = \frac{1}{2f'(1)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Δ3.



εφόσον οι παρατηρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή το ποσοστό των ατόμων που έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά είναι το 81,5%,

$$\text{επομένως: } \frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630 \text{ άτομα}$$

ενώ το ποσοστό των ατόμων που έχουν χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά

$$\text{είναι το 0,15%, δηλαδή: } \frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 3 \text{ άτομα}$$

Δ4. Αν ο χρόνος επιστροφής των μαθητών αυξηθεί κατά 3 λεπτά τότε όλες οι νέες παρατηρήσεις που θα προκύψουν είναι της μορφής  $y_i = x_i + 3$  συνεπώς

$$\bar{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12 \text{ ενώ } s_y = s_x = 2$$