

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c,$$

με $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $X = X_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο

$$R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\} \text{ και ισχύει } f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$.

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 6

B2. Αν $h(x) = (x - 1)^2$, $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1-1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

B3. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , \quad x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , \quad x=1 \end{cases}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , \quad x > -1 \end{cases} .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , \quad x \leq -1 \\ x^3 - x & , \quad x > -1 \end{cases} .$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 .

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y = 2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ϵ) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ϵ). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου MKG , όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και G είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3, 4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0 .

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] .$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 , με $x_1 < 1 < x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) .$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη στην σελίδα 186 του σχολικού βιβλίου.

A2. Θεώρημα στην σελίδα 142 του σχολικού βιβλίου.

A3. Ορισμός στην σελίδα 161 του σχολικού βιβλίου.

A4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1 : Για το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \rightarrow D_{f \circ g} = [0,1]$$

Με τύπο :

$$h(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

B2 : $h'(x) = 2(x - 1) \cdot (x - 1)' = 2(x - 1) < 0$ στο $[0,1]$ άρα η γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της h άρα η 1-1 ως γνησίως μονότονη συνάρτηση.

Για τον τύπο της h^{-1} θέτω :

$$y = h(x) \rightarrow y = (x - 1)^2 \rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{(x - 1)^2} \rightarrow$$

$$\sqrt{y} = |x - 1| \xrightarrow{x \in [0,1]} \sqrt{y} = -(x - 1) \rightarrow x = 1 - \sqrt{y}$$

Και επίσης το σύνολο τιμών της h είναι :

$$h([0,1]) \xrightarrow{h} [h(1), h(0)] = [0,1]$$

Το σύνολο τιμών της h είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της άρα :

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad D_{h^{-1}} = [0,1]$$

B3 :

i)

- Η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών και στο 1 διότι :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \varphi(1) = \frac{1}{2}$$

$$\circ \quad \varphi(0) = 1, \varphi(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Άρα, από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ ώστε $\varphi(x_0) = \xi$

- ii) Δίνεται ότι $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα το α ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο όπου εκεί το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, οπότε :

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{6} < \eta\mu \alpha < \eta\mu \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu \alpha < 1 \rightarrow \eta\mu \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Άρα, από το προηγούμενο ερώτημα, για κάθε αριθμό $\eta\mu \alpha$ μεταξύ των $f(0)=1$ και $f(1)=1/2$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = \eta\mu \alpha$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < -1$ ισχύει $f'(x) = (-2x)'$ άρα υπάρχει c_1 τέτοιο ώστε

$$f(x) = -2x + c_1$$

Για $x > -1$ ισχύει $f'(x) = (x^3 - x)'$ άρα υπάρχει c_2 τέτοιο ώστε

$$f(x) = x^3 - x + c_2$$

Ισχύει ότι $f(0)=0$ άρα για $x=0$, $f(0) = c_2 = 0$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο -1 άρα $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} -2x + c_1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 - x \Leftrightarrow -2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) + x_0^3 - x_0 \text{ και διερχεται απ το } (0, -2)$$

$$-2 = (3x_0^2 - 1)(0 - x_0) + x_0^3 - x_0 \Leftrightarrow -2 = -2x_0^3 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Άρα η εφαπτόμενη είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$y = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2$$

$$\Gamma 3. E = \frac{(K\Gamma)(MK)}{2} \text{ και } \chi > 2 \text{ αρα } E = \frac{(x-2)(2x-2)}{2} = x^2 - 3x + 2$$

$$E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$$

$$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$$

$$\Gamma \text{ια } t = t_0$$

$$E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 3x'(t_0) = 6 \text{ τ.μ/s}$$

$$\Gamma 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu u}{u} = 0 \text{ γιατί}$$

$$\text{Θέτουμε } f(x)=u \text{ με } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu u}{u} = 0 \text{ από κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{f(k)}{1+k^3} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{k^3 - k}{1+k^3} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{k^3}{k^3} = 1$$

$$\text{Θεσάμε } -x=k \text{ με } k \rightarrow +\infty \text{ Άρα τελικά το όριο } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

ι) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{3x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'				
f				

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα για $x \in [1, +\infty)$

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1 - \ln 3$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = +\infty$$

$$\text{και } f(1) = 1 - \ln 3$$

$$\text{Επειδή } e < 3 \Leftrightarrow \ln e < \ln 3 \Leftrightarrow 1 < \ln 3 \Leftrightarrow 1 - \ln 3 < 0 \Leftrightarrow f(1) < 0$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, επομένως

$$\Delta_1 = f((0, 1]) = [1 - \ln 3, +\infty) \text{ και } 0 \in [1 - \ln 3, +\infty)$$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, επομένως και «1-1», άρα το x_1 είναι μοναδικό.

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - \ln 3 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right) = +\infty \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, επομένως

$$\Delta_2 = f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1 - \ln 3, +\infty) \text{ και } 0 \in (1 - \ln 3, +\infty)$$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$, άρα και «1-1», άρα το x_2 είναι μοναδικό.

Επομένως υπάρχουν ακριβώς δύο $x_1 \in (0, 1]$ και $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$

υ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

Επομένως η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Δ2 Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$

Παρατηρούμε από τον πίνακα μονοτονίας της f ότι για $x \in [x_1, x_2]$ η f δε μηδενίζεται (από ερώτημα Δ1α) και είναι συνεχής. Επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Bolzano θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $x_1 < 1 < x_2$ και $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$, θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό γράφεται

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx = \\ &= \int_{x_2}^{x_1} (x - \ln(3x)) dx = \int_{x_2}^{x_1} x dx - \int_{x_2}^{x_1} \ln(3x) dx = I \end{aligned}$$

Εδώ έχουμε

$$\int_{x_2}^{x_1} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_2}^{x_1} = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} \text{ και}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{x_2}^{x_1} \ln(3x) dx &= \int_{x_2}^{x_1} (x)' \cdot \ln(3x) dx = \\ &= \left[x \cdot \ln(3x) \right]_{x_2}^{x_1} - \int_{x_2}^{x_1} 3x \cdot \ln(3x)' dx = \\ &= \left[x_1 \cdot \ln(3x_1) - 3x_2 \cdot \ln(3x_2) \right] - \int_{x_2}^{x_1} 1 dx = \\ &= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - \int_{x_2}^{x_1} 1 dx = \\ &= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - \left[x \right]_{x_2}^{x_1} = \\ &= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1 \text{ και}$$

$$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{x_2}^{x_1} \ln(3x) dx &= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - x_1 + x_2 = \\ &= x_1 \cdot x_1 - x_2 \cdot x_2 - x_1 + x_2 = \\ &= x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_2}^{x_1} x \, dx - \int_{x_2}^{x_1} \ln(3x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) - [x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)] = \\ &= \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + x_2^2 - x_1^2 + x_1 - x_2 = \\ &= \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - (x_2 - x_1) = \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)}{2} - \frac{2(x_2 - x_1)}{2} = \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1 - 2)}{2} \end{aligned}$$

Δ3

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) > 0$

Όμως είναι $x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$

Επομένως

$$x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 + 2 < 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$$

Επειδή $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ είναι $2 - x_1 \in (1, +\infty)$ και $x_2 \in (0, +\infty)$

Σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως

$$2 - x_1 < x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$$

Δ4

Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο x_2 είναι

$$\varepsilon: y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Η f είναι κυρτή, άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία. '

Άρα $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$

Παρατηρούμε ακόμη ότι $f(1) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow \ln 3 - 1 = -f(1)$

Με αυτά υπόψιν, η ζητούμενη σχέση γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} 2f(x) + \ln 3 &= 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow \\ 2f(x) + \ln 3 - 1 - f'(x_2)(x - x_2) &= 0 \Leftrightarrow \\ 2f(x) + f(1) - f'(x_2)(x - x_2) &= 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) - f(1)) + (f(x) - f'(x_2)(x - x_2)) &= 0 \end{aligned}$$

Είδαμε ότι η f έχει στο $x = 1$ ολικό ελάχιστο, επομένως

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0 \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x = 1$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη