ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

β) **i.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.* ***Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

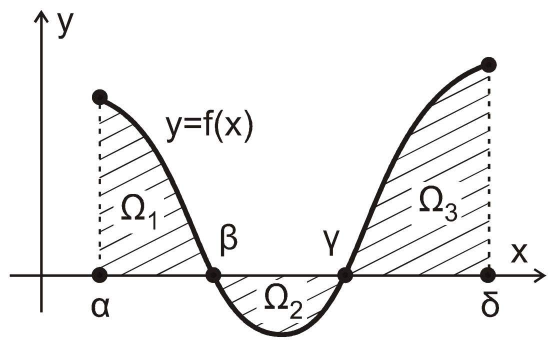
Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι

$E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$,

τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με:



α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ell n(x-2)$, $x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1. \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_o f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x),\ x\geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $M\hat{O}K$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\,\ell n(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ell n(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΠΤΑ (7)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) α) Θεωρία **Α1) β)** Θεωρία **Α2)** Θεωρία **Α3)** Θεωρία

Α4) α) Λάθος, $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$ **β)** Λάθος $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$ **Α5)** Σωστό το γ).

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-x}+\lambda) = 2 \Leftrightarrow 0+\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2.$

Β2. Θεωρούμε συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$h(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2$$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με:

$$h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και $1-1$.

Η h είναι συνεχής στο $[2,3] \subseteq \mathbb{R}$

- $h(2) = e^{-2} > 0$
- $h(3) = e^{-3} - 1 = \frac{1-e^{-3}}{e^3} < 0$

Επομένως $h(2)\cdot h(3) < 0$ και από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2,3)$ κι αφού η h είναι $1-1$ είναι μοναδική.

Β3. Είναι $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$, συνεπώς αντιστρέφεται.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \mathbb{R}$ άρα έχει σύνολο τιμών

$$f(D_f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (2,+\infty) \text{ διότι:}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2\right) = 2$

Για $x \in \mathbb{R}$ και $y \in (2,+\infty)$ είναι:

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x}+2 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y-2 \Leftrightarrow -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$$

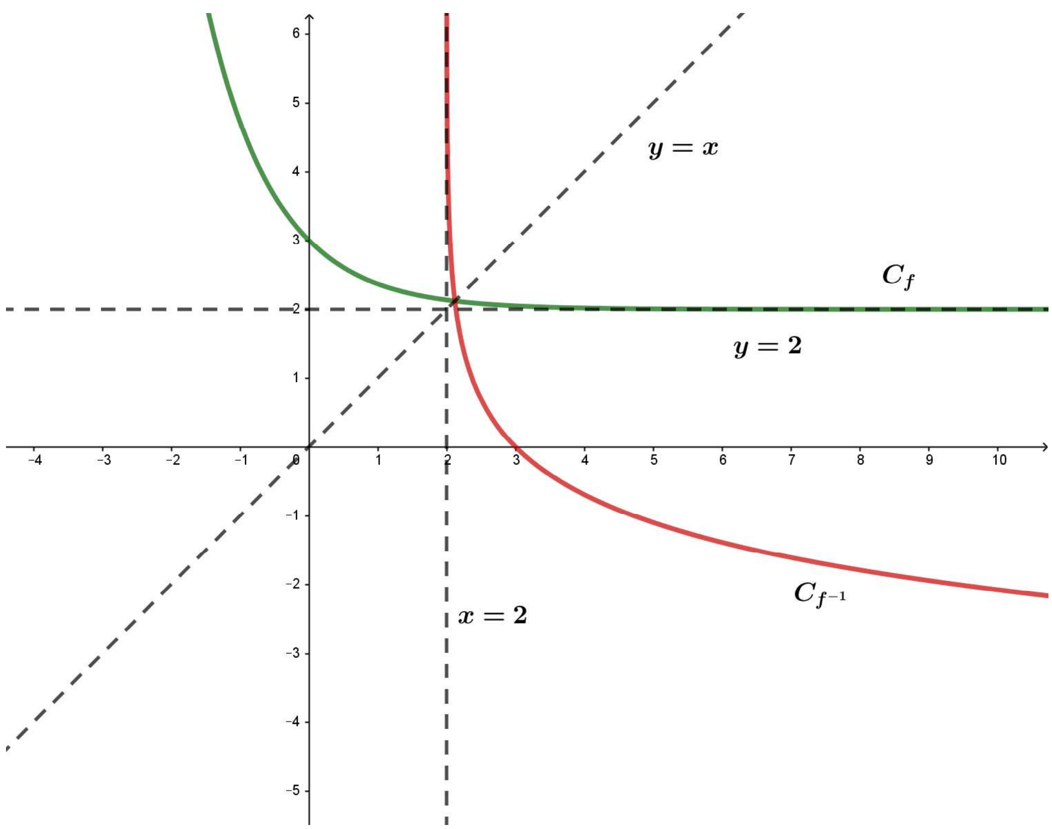
Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x-2), x \in (2,+\infty)$

B4. Είναι $\lim_{x\to2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right] = \lim_{u\to0^+}(-\ln u) = +\infty$ διότι,

Θέτουμε $u = x-2$ και είναι $\lim_{x\to2^+} u = \lim_{x\to2^+}(x-2) = 0$

Άρα η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης e^{-x} είναι συμμετρική της e^x ως προς τον άξονα $y'y$. Οπότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδες πάνω της e^{-x}. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y = x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=1$ άρα και συνεχής στο $x_0=1$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$ (1)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=e^0+\beta=1+\beta$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1+a$

$f(1)=1+\alpha$

λόγω της (1) θα είναι $1+\alpha=1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\in\mathbb{R}$ (2)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}$$
$$=e^0+\beta=1+\beta$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{1}=2$$

Λόγω της (2) θα είναι $1+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1$ οπότε λόγω της (1) $\alpha=1$

Γ2. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\ge 1\\ e^{x-1}+x & , \quad x<1\end{cases}$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\begin{cases} 2x & , \quad x\ge 1\\ e^{x-1}+1 & , \quad x<1\end{cases}$

Είναι $2x\ge 2>0$ για κάθε $x\ge 1$ οπότε $f \nearrow$ στο $[1,+\infty)$

και $e^{x-1}+1>1>0$ για κάθε $x<1$ οπότε $f\nearrow$ στο $(-\infty,1]$.

Επιπλέον η f είναι και συνεχής στο $x_0=1$ άρα $f\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Έτσι $f(A)=f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(-\infty,+\infty\right)=\mathbb{R}$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$

Γ3. i. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,0)$, οπότε

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(0)\right)=(-\infty,2)$$

διότι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$$

και

$$f(0)=e^{-1}$$

Το $0\in f(A_1)$ συνεπώς η εξίσωση $f(x)=0$ έχει αρνητική ρίζα x_0 η οποία είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Για $x\in(x_0,+\infty)$ είναι

$$f^2(x)-x_0f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$$

Έχουμε

$$x>x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0$$

και

$$f(x)-x_0>0 \text{ για κάθε } x>x_0$$

διότι

$$f(x)>0 \text{ και } x_0<0\Leftrightarrow -x_0>0$$

Οπότε η εξίσωση $f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Γ4. Για $x\geq 1$ έχουμε

$$E=\frac{1}{2}(OK)(KM)=\frac{1}{2}|x||f(x)|=\frac{1}{2}x\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\left(x^3+x\right)$$

Το εμβαδόν συναρτήσει του χρόνου είναι

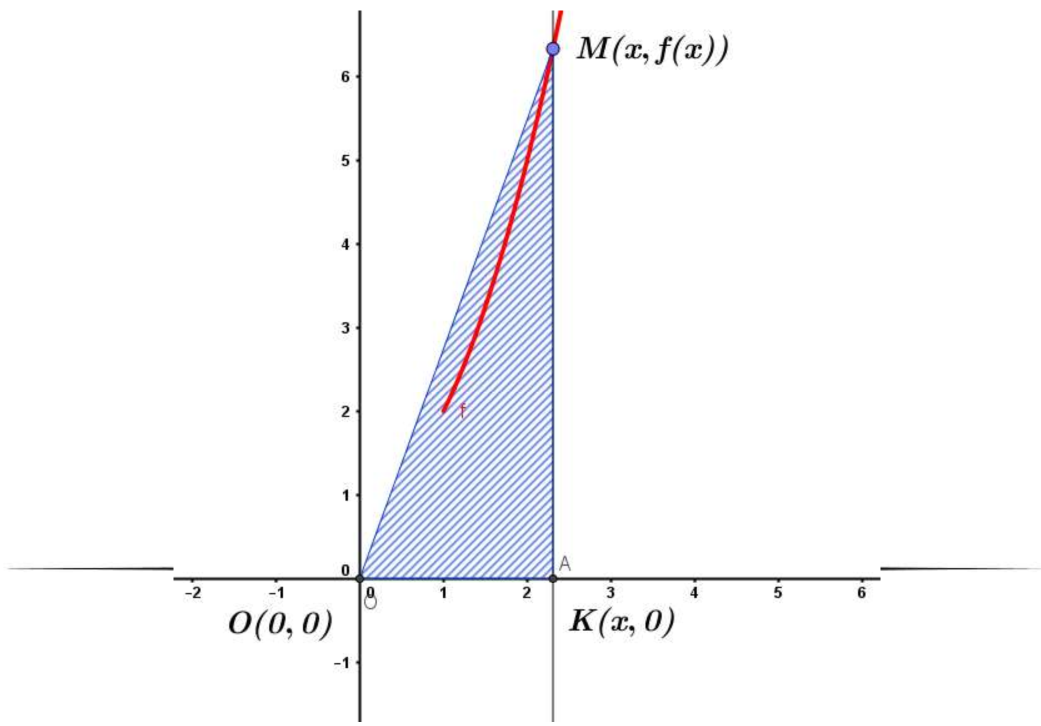
$$E(t)=\frac{1}{2}\left(x^3(t)+x(t)\right)$$

Παραγωγίζουμε ως προς t και έχουμε

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left(3x^2(t)x'(t)+x'(t)\right)$$

Για $t=t_0$ είναι

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}\left(3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)\right)=\frac{1}{2}\left(3\cdot3^2\cdot2+2\right)=28cm^2/sec$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$

Οπότε $f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1 \quad (1)$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}(x-1)+\alpha$$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

$$f'(1)=-1 \Leftrightarrow \ln 1+\frac{2(1-1)^2}{1-2+2}+\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-1 \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε $\alpha=-1$ και $\beta=2$

Δ2. $E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|f(x)+x-2\right|dx$

Για κάθε $x\in[1,2]$ $f(x)+x-2=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2+x-2$

$$=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0$$

Οπότε $E=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$

Θέτω $x^2-2x+2=u$ άρα $2(x-1)dx=du$

x	1	2
u	1	2

Άρα $E=\int_1^2 \frac{1}{2}\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2 u'\ln u du=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du$

$=\frac{1}{2}(2\ln 2-1\ln 1)-\frac{1}{2}[u]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$ τ.μ.

Δ3. i. Είδαμε ότι :

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$$

Έχουμε

$$f'(x)\geq -1 \Leftrightarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$$

Που ισχύει αφού :

$$(x-1)^2+1\geq 1 \overset{\ln x \ 1 \ (0,+\infty)}{\Rightarrow} \ln\left((x-1)^2+1\right)\geq \ln 1 \Rightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0 \text{ και } \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$$

ii. Η f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

από ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$

Όμως

$$f'(\xi)\geq -1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq (\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq (\lambda-1)\left(\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)\right)+\frac{3}{2}$$

Δ4.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=-3x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

Έστω $M\left(x_1,f(x_1)\right), N\left(x_2,g(x_2)\right)$ τα σημεία επαφής των C_f, C_g αντίστοιχα τότε πρέπει,

$f'(x_1)=g'(x_2)$

Όμως από το Δ3i είναι $f'(x_1)\geq -1$, με την ισότητα να ισχύει για $x_1=1$ και
$g'(x_2)=-3x_2^2-1\leq -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_2=0$
Άρα είναι $M(1,f(1))$ και $N(0,g(0))$ μοναδικά σημεία αφού οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x_1=1$ και $x_2=0$
Άρα η κοινή τους εφαπτομένη είναι

$$\varepsilon: y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-x+2$$

Β΄ τρόπος

Έστω $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_1,f(x_1))$ είναι

$$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)=f'(x_1)x+f(x_1)-f'(x_1)(x_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(x_2,g(x_2))$ είναι :

$$y=g'(x_2)(x-x_2)+g(x_2)=g'(x_2)x+g(x_2)-x_2g'(x_2)$$

Η C_f και η C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν

$$\left.\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2) \\ f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2 \end{cases}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{cases} f'(x_1)=-3x_2^2-1 \qquad (1) \\ f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2 \end{cases}\right\}(\Sigma)$$

Όμως $f'(x_1)\geq -1$ και $-3x_2^2-1\leq -1$

Άρα για να ισχύει η (1) πρέπει :

$f'(x_1)=-1$ και $-3x_2^2-1=-1\Leftrightarrow f'(x_1)=-1$ και $x_2=0$

Όμως $f'(x_1)=-1\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1=-1$

$$\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}=0\Leftrightarrow x=1$$

Αφού $\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$ και $\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 1

Άρα $f'(x_1)=-1\Leftrightarrow x_1=1$

$$(\Sigma)\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x_1=1 \text{ και } x_2=0 \\ f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2 \end{cases}\right\}\Leftrightarrow x_1=1 \text{ και } x_2=0$$

Αφού επαληθεύουν και την :

$$f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2$$

Για $x_1=1$ έχουμε :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-1(x-1)+1=-x+1+1=-x+2$$