ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

1. δ
2. γ
3. α
4. δ
5. α.Σ β.Λ γ.Σ δ.Λ ε.Λ

ΘΕΜΑ Β

1. Σωστή είναι η απάντηση β.

Κατά τη διάρκεια της κίνησης των δύο σωμάτων οι ασκούμενες δυνάμεις είναι συντηρητικές, οπότε η μηχανική τους ενέργεια διατηρείται. Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το χαμηλότερο σημείο του πλάγιου επιπέδου, η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας γράφεται:

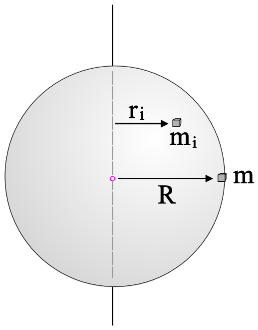
$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow U_{\alpha\rho\chi} = K_{\mu\varepsilon\tau(\tau\varepsilon\lambda)} + K_{\sigma\tau\rho(\tau\varepsilon\lambda)}$$

Τα δύο σώματα ξεκινούν από το ίδιο ύψος και έχουν ίδια μάζα, άρα έχουν και ίδιο $U_{\alpha\rho\chi}$.

Στη σφαίρα, η μείωση της δυναμικής ενέργειας μετατρέπεται σε αύξηση της μεταφορικής κινητικής και σε αύξηση της στροφικής κινητικής ενέργειας. Στον κύβο όλη η μείωση της δυναμικής ενέργειας μετατρέπεται σε αύξηση της μεταφορικής κινητικής ενέργειας. Άρα ο κύβος αποκτά μεγαλύτερη μεταφορική κινητική ενέργεια και από τον τύπο $K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2$, προκύπτει ότι και το κέντρο μάζας του θα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα.

2. Σωστή είναι η απάντηση β.

Ο μαθηματικός τύπος του ορισμού της ροπής αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι $I = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2$. Στον τύπο αυτό οι αποστάσεις r_i μετρούν από τον άξονα περιστροφής του στερεού σώματος και όχι από το κέντρο μάζας. Έτσι, πολύ λίγες μάζες του κελύφους βρίσκονται σε απόσταση R. Οι πολλές στοιχειώδεις μάζες βρίσκονται σε αποστάσεις μικρότερες του R



3. Σωστή πρόταση είναι η α .

Το σύστημα των δύο χορευτών είναι ένα ελεύθερο στερεό το οποίο στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος και το οποίο βρίσκεται κάπου μεταξύ των δύο χορευτών.

Όταν λυγίσουν τα χέρια τους θα μικρύνουν οι αποστάσεις των μαζών τους από τον άξονα περιστροφής με συνέπεια να ελαττωθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος.

Οι δυνάμεις που προκάλεσαν τη μείωση της ροπής αδράνειας του συστήματος είναι εσωτερικές. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι τα βάρη και οι δυνάμεις στήριξης οι οποίες είναι παράλληλες με τον άξονα περιστροφής, οπότε δεν προκαλούν ροπές. Επειδή λοιπόν η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται είναι μηδέν θα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα, δηλαδή:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \;\Rightarrow\; \mathrm{I}_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi} = \mathrm{I}_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot \omega_{\tau\varepsilon\lambda}$$

Επειδή $L_{\alpha\rho\chi} > \mathrm{I}_{\tau\varepsilon\lambda}$, θα είναι και $\omega_{\alpha\rho\chi} < \omega_{\tau\varepsilon\lambda}$

Άρα σωστή πρόταση είναι η α.

4. Σωστή είναι η απάντηση γ

Η γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει η ράβδος βρίσκεται από τη σχέση

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{\mathrm{I}} \quad (1)$$

Η ράβδος είναι ένα ελεύθερο στερεό και θα περιστραφεί γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, το οποίο βρίσκεται κάπου μεταξύ Α και Μ, αφού το τμήμα ΑΜ έχει περισσότερη μάζα από το τμήμα ΜΒ. Η ροπή αδράνειας είναι και τις δύο φορές ίδια, αφού η περιστροφή γίνεται γύρω από τον ίδιο άξονα. Όμως, όταν η δύναμη ασκείται στο άκρο Β δημιουργείται μεγαλύτερος μοχλοβραχίονας, άρα μεγαλύτερη ροπή και μεγαλύτερη $\alpha_{\gamma\omega\nu}$.

ΘΕΜΑ Γ

α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα παραλλήλων αξόνων ή Steiner.

$$I_A = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_A = \frac{1}{2}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I_A = m\frac{\ell^2}{3} = 3kg\cdot\frac{(1m)^2}{3} \Rightarrow I_A = 1kgm^2$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση.

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{\mathrm{I}} = \frac{F\ell}{I_A} = \frac{20N}{1kgm^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20rad/s^2$$

Β. $L = I\omega \quad (1)$

Η κίνηση είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη,άρα η γωνιακή ταχύτητα βρίσκεται από τη σχέση $\omega = a_{\gamma\omega\nu}t \quad (2)$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$L = Ia_{\gamma\omega\nu}t = 1kgm^2\cdot 20\frac{rad}{s^2}\cdot 4s \Rightarrow L = 80kgm^2/s$$

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = F\ell \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 20N\cdot 1m \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 20kgm^2/s^2$$

γ. Η ενέργεια που προσφέρθηκε στη ράβδο μέσω του έργου της ροπής της F, στη διάρκεια του 5ου δευτερόλεπτου είναι ίση με τη μεταβολή της στροφικής κινητικής ενέργειας της ράβδου στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

$$W = K_5 - K_4 = \frac{1}{2}I\omega_5^2 - \frac{1}{2}I\omega_4^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2}I\left(\omega_5^2 - \omega_4^2\right) \qquad (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) βρίσκουμε τις γωνιακές ταχύτητες τις χρονικές στιγμές $t = 4\sec$ και $t = 5\sec$.

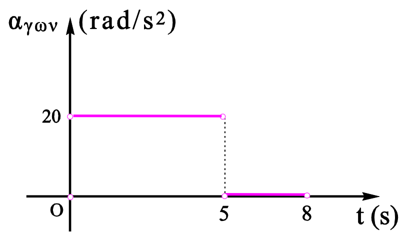
$$\omega_4 = a_{\gamma\omega\nu}t = 20\frac{rad}{s^2}\cdot 4s \Rightarrow \omega_4 = 80\frac{rad}{s}$$

$$\omega_5 = a_{\gamma\omega\nu}t = 20\frac{rad}{s^2}\cdot 5s \Rightarrow \omega_4 = 100\frac{rad}{s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$W = \frac{1}{2}1kgm^2\left[(100rad/s)^2 - (80rad/s)^2\right] \Rightarrow W = 1800J$$

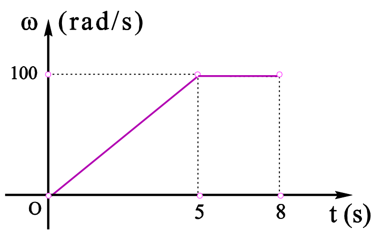
δ) Η γωνιακή επιτάχυνση από 0 έως 5s είναι σταθερή και ίση με 20rad/s^2. Για το χρονικό διάστημα από 5s έως και 8s θα είναι μηδέν. Η ζητούμενη γραφική παράσταση δείχνεται στο σχήμα.



Η γωνιακή ταχύτητα από 0 έως 5s αυξάνεται με σταθερό ρυθμό και το μέτρο της δίνεται από τη σχέση

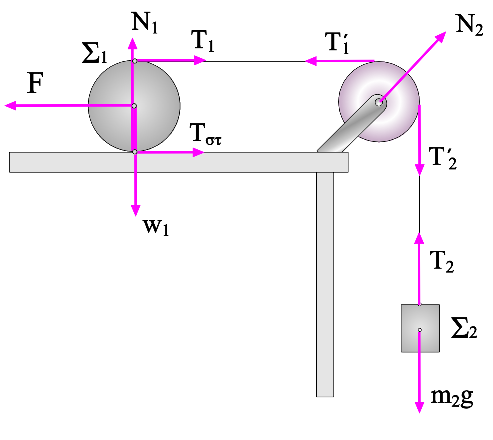
$\omega = a_{\gamma\omega\nu} t = 20 \cdot t \quad (SI)$

Για το χρονικό διάστημα από 5s έως και 8s το μέτρο της είναι σταθερό και έχει τιμή ίση με αυτή που απέκτησε τη χρονική στιγμή 5s, δηλαδή ίση με $100\dfrac{rad}{s}$. Η ζητούμενη γραφική παράσταση δείχνεται στο σχήμα.



ΘΕΜΑ Δ

α) Από την ισορροπία του σώματος Σ_2 προκύπτει:



$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 - m_2 g = 0 \;\Rightarrow T_2 = 3N$

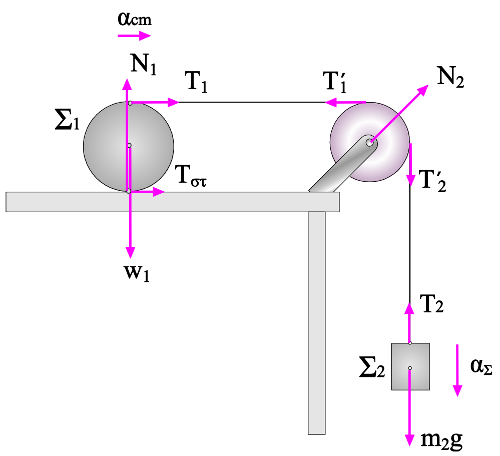
Από τη στροφική ισορροπία του κυλίνδρου προκύπτει:

$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_1 R - T_{\sigma\tau} R = 0 \;\Rightarrow T_1 = T_{\sigma\tau}$. Επειδή το σύστημα είναι ακίνητο η τάση του νήματος T_1 έχει ίδιο μέτρο με την τάση του νήματος T_2. Άρα, $T_1 = T_{\sigma\tau} = 3N$

Από τη μεταφορική ισορροπία του κυλίνδρου στον άξονα x προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1 + T_{\sigma\tau} - F = 0 \Rightarrow F = 2T_1 \Rightarrow F = 6N$$

Β)



Γράφουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου.

$$\Sigma F = m_1 a_{cm} \Rightarrow T_1 + T_{\sigma\tau\alpha\tau} = m_1 a_{cm} \qquad (1)$$

Γράφουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για την στροφική κίνηση του κυλίνδρου.

$$\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 R - T_{\sigma\tau\alpha\tau} R = \frac{1}{2} m_1 R^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 - T_{\sigma\tau\alpha\tau} = \frac{1}{2} m_1 R \, a_{\gamma\omega\nu} \qquad (2)$$

Η μεταφορική και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου συνδέονται με τη σχέση

$$a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R \qquad (3)$$

Γράφουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για την μεταφορική κίνηση του σώματος Σ_2.

$$\Sigma F = m_2 a_\Sigma \Rightarrow m_2 g - T_2 = m_2 a_\Sigma \qquad (4)$$

Το μέτρο της T_2 είναι ίσο με το μέτρο της T'_2 και το μέτρο της T_1 είναι ίσο με το μέτρο της T'_1.

Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για την τροχαλία γράφεται:

$$\Sigma \tau = I' a'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1' R' - T_2' R' = I' a'_{\gamma\omega\nu}$$

Επειδή η τροχαλία θεωρείται χωρίς μάζα $I' = 0$, προκύπτει

$T_1' = T_2'$ με συνέπεια και $T_1 = T_2$. Έτσι η σχέση (4) γράφεται:

$$\Sigma F = m_2 a_\Sigma \Rightarrow m_2 g - T_1 = m_2 a_\Sigma \qquad (5)$$

Για να βρούμε τη σχέση που συνδέει την επιτάχυνση a_Σ με την επιτάχυνση a_{cm} σκεπτόμαστε ως εξής: Η μετατόπιση κατά Δh του σώματος Σ_2 προέρχεται από το άθροισμα της μετατόπισης κατά Δx_{cm} του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και του μήκους του σχοινιού Δs που ξετυλίχτηκε.

$$\Delta h = \Delta x_{cm} + \Delta s \Rightarrow \quad \Delta h = \Delta x_{cm} + R\Delta\vartheta \qquad (6)$$

Παίρνοντας δύο φορές χρονικούς ρυθμούς μεταβολής στην τελευταία σχέση καταλήγουμε στην

$$a_{\Sigma} = \alpha_{cm} + R\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\Sigma} = 2\alpha_{cm} \qquad (7)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και λαμβάνοντας υπόψη την (3) παίρνουμε:

$$2T_1 = \frac{3}{2}m_1 a_{cm} \Rightarrow T_1 = \frac{3}{4}m_1 a_{cm} \qquad (8)$$

Αντικαθιστώντας στην (5) το T_1 από την τελευταία σχέση και λαμβάνοντας υπόψη την (7) παίρνουμε:

$$m_2 g - \frac{3}{4}m_1 a_{cm} = 2m_2 a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{g}{2 + \frac{3m_1}{4m_2}} = \frac{10\frac{m}{s^2}}{2 + \frac{3\cdot 3,2kg}{4\cdot 0,3kg}} \Rightarrow a_{cm} = 1m/s^2$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (7) παίρνουμε $a_{\Sigma} = 2m/s^2$

γ) Η κίνηση του σώματος Σ_2 είναι ομαλά μεταβαλλόμενη και η μετατόπισή του περιγράφεται από τη σχέση:

$h = \frac{1}{2}a_{\Sigma}t^2$ από την οποία λύνοντας ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας παίρνουμε: $t = \sqrt{\frac{2h}{a_{\Sigma}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4m}{2m/s^2}} \Rightarrow t = 2s$

Η μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλά μεταβαλλόμενη και η ταχύτητα του κέντρου μάζας περιγράφεται από την εξίσωση $\upsilon_{cm} = a_{cm}t$

Με αντικατάσταση παίρνουμε: $\upsilon_{cm} = 1\frac{m}{s^2}\cdot 2s \Rightarrow \upsilon_{cm} = 2m/s$

Σύμφωνα με τη σχέση (6) το μήκος Δs του σχοινιού που ξετυλίχτηκε είναι ίσο με

$$\Delta x_{cm} + \Delta s = h \Rightarrow \Delta s = h - \Delta x_{cm} \qquad (9)$$

Όμως, $\Delta x_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\frac{m}{s^2}\cdot(2s)^2 \Rightarrow \Delta x_{cm} = 2m$

Οπότε με αντικατάσταση στην (9) προκύπτει $\Delta s = 4m - 2m \Rightarrow \Delta s = 2m$

δ.

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{dW_{\tau}}{dt} = \frac{\Sigma\tau \cdot d\vartheta}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = (T_1 R - T_{\sigma\tau} R) \cdot \omega = (T_1 - T_{\sigma\tau}) R \cdot \frac{\upsilon_{cm}}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = (T_1 - T_{\sigma\tau})\upsilon_{cm} \qquad (10)$$

Το μέτρο της T_1 βρίσκεται με αντικατάσταση του a_{cm} στη σχέση (8)

$$T_1 = \frac{3}{4} m_1 a_{cm} = \frac{3}{4} \cdot 3,2kg \cdot 1\frac{m}{s^2} \Rightarrow T_1 = 2,4N$$

Το μέτρο της $T_{\sigma\tau}$ βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση (1)

$$T_{\sigma\tau\alpha\tau} = m_1 a_{cm} - T_1 = 3,2kg \cdot 1\frac{m}{s^2} - 2,4N \Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau} = 0,8N$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (10) παίρνουμε:

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = (T_1 - T_{\sigma\tau})\upsilon_{cm} = (2,4N - 0,8N) \cdot \frac{2m}{s} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = 3,2\frac{J}{s}$$