ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}: ΚΡΟΥΣΕΙΣ – ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα βλήμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα υ_0. Όταν το βλήμα φτάνει στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του εκρήγνυται σε τρία κομμάτια. Αμέσως μετά την έκρηξη, η ολική ορμή και των τριών κομματιών είναι

α) μηδέν.

β) $m\upsilon_0$.

γ) διάφορη του μηδενός και διάφορη του $m\upsilon_0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η έκρηξη διαρκεί πολύ μικρό χρόνο, τυχόν επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, όπως εδώ το βάρος, θεωρείται αμελητέα. Συνεπώς στη διάρκεια της έκρηξης η ορμή διατηρείται. Επειδή η κρούση έγινε στο ψηλότερο σημείο, η ταχύτητα του σώματος πριν την έκρηξη είναι μηδέν, άρα και η ορμή του.

Συνεπώς από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει: $p_{Τελ} = p_{Αρχ} = 0$.

Ερώτηση 2.

Μια σφαίρα Α μάζας m κινούμενη οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα Β ίσης μάζας. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α, λόγω της κρούσης,

α) έχει ίδια κατεύθυνση με την αρχική ορμή και μέτρο $m\upsilon$.

β) έχει αντίθετη κατεύθυνση με την αρχική ορμή και μέτρο $m\upsilon$.

γ) έχει αντίθετη κατεύθυνση με την αρχική ορμή και μέτρο $2m\upsilon$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική ελαστική τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Συνεπώς η τελική ορμή της σφαίρας Α θα είναι μηδέν. Η μεταβολή της ορμής της θα είναι:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{T\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{A\rho\chi} = 0 - \vec{p}_{A\rho\chi} = -m \cdot \vec{\upsilon}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Α θα έχει ίδια διεύθυνση με την αρχική ορμή και αντίθετη φορά (-). Το μέτρο της θα είναι $\Delta p = m \cdot \upsilon$.

Ερώτηση 3.

Δύο σώματα με ορμές των οποίων τα μέτρα είναι ίσα ($p_1 = p_2 = p$), κινούνται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους και συγκρούονται πλαστικά.

Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίσο με:

α) p .

β) $2p$.

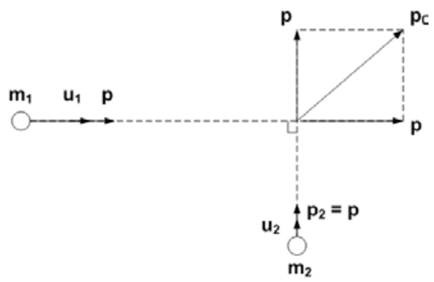
γ) $\sqrt{2}p$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, οπότε: $\vec{p}_{Αρχ} = \vec{p}_{Τελ}$. Το μέτρο της ολικής ορμής, p_0 , του συστήματος πριν την κρούση είναι $p_o = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p$.



Άρα $p_{Τελ} = \sqrt{2}p$.

Ερώτηση 4.

Δύο σώματα με ίσες μάζες ($m_1 = m_2 = m$) και ορμές των οποίων τα μέτρα είναι ίσα ($p_1 = p_2 = p$), κινούνται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους και συγκρούονται πλαστικά. Αν η κινητική ενέργεια και η ορμή ενός σώματος συνδέονται με τη σχέση $K = \frac{p^2}{2m}$, τότε η μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με

α) $\frac{p^2}{m}$.

β) $\frac{p^2}{2m}$.

γ) $\frac{p^2}{4m}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

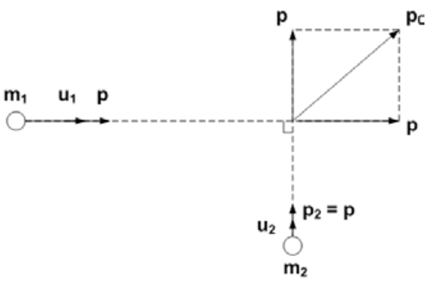
<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

$$|\Delta K| = K_1 + K_2 - K_{\Sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{p_1^{\,2}}{2m} + \frac{p_2^{\,2}}{2m} - \frac{p_{\tau\varepsilon\lambda}^{\,2}}{2(m+m)} \qquad (1)$$

Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, οπότε: $\vec{p}_{A\rho\chi} = \vec{p}_{T\varepsilon\lambda}$.

Το μέτρο της ολικής ορμής, p_0, του συστήματος πριν την κρούση είναι $p_o = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p$.



Άρα $p_{T\varepsilon\lambda} = \sqrt{2}p$.

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$|\Delta K| = \frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{2m} - \frac{(\sqrt{2}p)^2}{2(m+m)} \Rightarrow |\Delta K| = \frac{p^2}{2m}$$

Ερώτηση 5.

Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα κάτω και συγκρούεται ελαστικά με οριζόντιο δάπεδο. Αν η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και υ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση, τότε η μεταβολή της ταχύτητάς του, λόγω της κρούσης

α) είναι μηδέν.

β) έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με υ.

γ) έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο ίσο με 2υ.

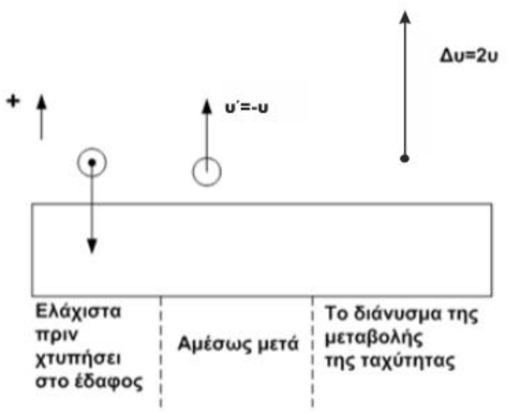
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική το σώμα θα αναπηδήσει με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Συνεπώς, $\Delta\vec{\upsilon} = \overrightarrow{\upsilon_\tau} - \overrightarrow{\upsilon_\alpha}$. Αν ορίσουμε θετική φορά προς τα πάνω προκύπτει ότι και το διάνυσμα $\Delta\vec{\upsilon}$ θα έχει θετική φορά, το μέτρο του θα είναι:

$$\left|\Delta\vec{\upsilon}\right| = \left|\overrightarrow{\upsilon_\tau} - \overrightarrow{\upsilon_\alpha}\right| = \upsilon - (-\upsilon) = 2\upsilon$$



Ερώτηση 6.

Μια σφαίρα Σ_1, μάζας $m_1 = m$, συγκρούεται κεντρικά πλαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2, μάζας $m_2 = m$. Στη σφαίρα Σ_1 μετά την κρούση μένει το

α) 50% της αρχικής ενέργειάς της.

β) 100% της αρχικής ενέργειάς της.

γ) 25% της αρχικής ενέργειάς της.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Με εφαρμογή της διατήρησης της ορμής βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος.

$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V$, από όπου προκύπτει $V = \dfrac{m_1\upsilon_1}{(m_1 + m_2)} = \dfrac{\upsilon_1}{2}$.

Οπότε η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 μετά την κρούση θα είναι:

$$K'_1 = \frac{m_1 V^2}{2} = \frac{m_1 \upsilon_1{}^2}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{K_1}{4}$$

Όπου K_1 η κινητική της ενέργεια πριν την κρούση,

$$K_1 = \frac{m_1 \upsilon_1{}^2}{2} = 4K'_1$$

Συνεπώς το % ποσοστό της ενέργειας που αντιστοιχεί (μένει) στη μάζα m_1 θα είναι:

$$\alpha\% = \frac{K'_1}{K_1} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$$

Ερώτηση 7.

Αυτοκίνητο της τροχαίας κινείται σε ευθύ δρόμο με σταθερή ταχύτητα $\frac{\upsilon_{ήχου}}{10}$ και έχει ενεργοποιημένη τη σειρήνα του, η οποία παράγει ήχο συχνότητας f_s. Μοτοσικλετιστής που προπορεύεται και κινείται με ταχύτητα μέτρου το μισό από αυτό της ταχύτητας του αυτοκινήτου, ακούει ήχο με συχνότητα f_A για την οποία ισχύει

α) $f_A = \frac{19}{18} f_s$.

β) $f_A = \frac{20}{18} f_s$.

γ) $f_A = \frac{21}{19} f_s$.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Έχουμε πηγή που κατευθύνεται προς παρατηρητή και παρατηρητή που απομακρύνεται από την πηγή. Άρα ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής έχει συχνότητα που δίνεται από τη σχέση:

$$f_A = f_s \frac{\upsilon_{ήχου} - \upsilon_A}{\upsilon_{ήχου} - \upsilon_s}$$

Με αντικατάσταση $\upsilon_s = \frac{\upsilon_{ήχου}}{10}$ και $\upsilon_A = \frac{\upsilon_s}{2} = \frac{\upsilon_{ήχου}}{20}$ παίρνουμε:

$$f_A = f_s \frac{\upsilon_{ήχου} - \frac{\upsilon_{ήχου}}{20}}{\upsilon_{ήχου} - \frac{\upsilon_{ήχου}}{10}} \Rightarrow f_A = f_s \frac{\frac{19}{20}\upsilon_{ήχου}}{\frac{9}{10}\upsilon_{ήχου}} \Rightarrow f_A = f_s \frac{19}{18}$$

Ερώτηση 8.

Ένα σώμα Α με ορμή μέτρου p και μάζα m συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα Β, ίδιας μάζας με το Α. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α είναι ίση με

α) μηδέν.

β) $-\frac{p^2}{2m}$.

γ) $\frac{p^2}{2m}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική και τα δύο σώματα έχουν ίδια μάζα, τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες. Επειδή το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα παραμείνει ακίνητο, κατά συνέπεια η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α θα είναι ίση με

$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = 0 - \frac{m\upsilon^2}{2} \Rightarrow \Delta K = -\frac{m^2\upsilon^2}{2m} \Rightarrow \Delta K = -\frac{p^2}{2m}$$

Ερώτηση 9.

Μια πηγή ήχου που πλησιάζει προς ακίνητο παρατηρητή εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s που διαδίδεται με ταχύτητα υ. Για να αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής συχνότητα f_A διπλάσια από τη συχνότητα που εκπέμπει η πηγή

α) να πλησιάζει τον παρατηρητή με ταχύτητα $\upsilon_s = 2\upsilon$.

β) να πλησιάζει τον παρατηρητή με ταχύτητα $\upsilon_s = \frac{\upsilon}{2}$.

γ) να απομακρύνεται από τον παρατηρητή με ταχύτητα $\upsilon_s = \upsilon$.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Ισχύει $f_A = 2f_s$ (1)

Έχουμε πηγή που κατευθύνεται προς ακίνητο παρατηρητή, άρα ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής έχει συχνότητα $f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s} f_s$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\upsilon_s = \frac{\upsilon}{2}$.

Ερώτηση 10.

Μια σφαίρα Σ_1, μάζας $m_1 = m$, συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2, μάζας $m_2 = m$. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 λόγω της κρούσης

α) μετατρέπεται σε θερμότητα που μεταφέρεται στο περιβάλλον.

β) μοιράζεται μεταξύ των δύο σφαιρών.

γ) μεταφέρεται εξολοκλήρου στη σφαίρα Β

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική διατηρείται η μηχανική ενέργεια και δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας στο περιβάλλον. Επειδή τα δύο σώματα έχουν ίδια μάζα, λόγω της κρούσης, τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητα. Επειδή το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα παραμείνει ακίνητο, κατά συνέπεια, λόγω της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, όλη η κινητική ενέργεια του σώματος Α θα μεταφερθεί στο σώμα Β.

Ερώτηση 11.

Μια ρόδα αυτοκινήτου ακτίνας R κυλίεται με το κέντρο μάζας της να έχει σταθερή ταχύτητα υ. Ένα μικρό καρφί μάζας m είναι καρφωμένο στην εξωτερική επιφάνεια της ρόδας. Αν θεωρήσουμε τις διαστάσεις του καρφιού αμελητέες, τότε η μεταβολή της ορμής του καρφιού, μεταξύ κατώτερης και ανώτερης θέσης

α) είναι $m\upsilon$.

β) είναι μηδέν.

γ) έχει μέτρο ίσο με $2m\upsilon$.

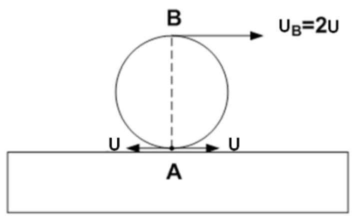
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή η ρόδα κυλίεται η ταχύτητα του καρφιού όταν περνά από την κατώτερη θέση (όταν είναι σε επαφή με το έδαφος) είναι μηδέν, ενώ όταν το καρφί διέρχεται από το ψηλότερο σημείο της τροχιάς του έχει ταχύτητα 2υ. Έτσι, το καρφί στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του έχει ορμή μέτρου 0 και στο ψηλότερο σημείο έχει ορμή μέτρου $p = 2m\upsilon$.

Συνεπώς, η μεταβολή της ορμής του μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων θα έχει μέτρο $|\Delta\vec{p}| = |\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}| = |2m\upsilon - 0| \Rightarrow |\Delta\vec{p}| = 2m\upsilon$ και οριζόντια διεύθυνση, δηλαδή θα έχει ίδια κατεύθυνση με αυτήν της ταχύτητας που έχει στο ψηλότερο σημείο.



Ερώτηση 12.

Ένα σώμα A μάζας $m_1 = 2m$, το οποίο έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ συγκρούεται πλαστικά με σώμα B μάζας $m_2 = m$. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων, $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$, των δύο σωμάτων πριν την κρούση είναι:

α) $\frac{1}{2}$.

β) 2.

γ) 4.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής προκύπτει ότι για να είναι η ορμή του συστήματος πριν την κρούση μηδέν πρέπει το δεύτερο σώμα να κινείται και μάλιστα με ορμή αντίθετη από αυτήν του σώματος Α.

Εφαρμόζουμε την Διατήρησης της Ορμής για την κρούση.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 = 0 \Rightarrow 2m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 13.

Ένα σώμα A μάζας $m_1 = 2m$, το οποίο έχει κινητική ενέργεια $K_A = K$, συγκρούεται πλαστικά με σώμα B μάζας $m_2 = m$. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Η μηχανική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι ίση με

α) $4K$.

β) $\frac{K}{3}$.

γ) $3K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Αφού το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο όλη η κινητική ενέργεια που είχαν τα σώματα πριν την κρούση μετατρέπεται σε θερμότητα.

$Q = K_A + K_B$ (1)

Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 = 0 \Rightarrow 2m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon_2 = 2\upsilon_1$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1)παίρνουμε:

$$Q = K_A + K_B = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}2m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m(2\upsilon_1)^2 = m\upsilon_1^2 + 2m\upsilon_1^2 \Rightarrow$$
$$Q = K + 2K \Rightarrow Q = 3K$$

Ερώτηση 14.

Ένα σώμα A μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα υ_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα B μάζας m_2. Το σώμα A συνεχίζει μετά την κρούση να κινείται κατά την ίδια φορά με ταχύτητα $\upsilon'_1 = \frac{\upsilon_1}{2}$. Ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων, $\frac{m_1}{m_2}$, είναι ίσος με

α) 3.

β) 2.

γ) $\frac{1}{3}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η κρούση είναι κεντρική ελαστική και το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\frac{\upsilon_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 2m_1 - 2m_2 \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

Άρα, $\frac{m_1}{m_2} = 3$.

Ερώτηση 15.

Δύο σφαίρες A και B, με ίσες μάζες, κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ίδιες κατευθύνσεις και ταχύτητες που έχουν μέτρα $\upsilon_1 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ και $\upsilon_2 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, αντίστοιχα. Οι σφαίρες συγκρούονται χωρίς να δημιουργείται συσσωμάτωμα. Αν μετά την κρούση το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας A είναι $\upsilon'_1 = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, τότε η κρούση είναι

α) ελαστική.

β) πλάγια.

γ) ανελαστική.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή οι σφαίρες κινούνται με ίδιες κατευθύνσεις η κρούση δεν είναι πλάγια.

Ισχύει η διατήρηση της ορμής.

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \Rightarrow m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$$

Επειδή $m_1 = m_2 = m$ η σχέση γίνεται $\upsilon_1 + \upsilon_2 = \upsilon_1' + \upsilon_2'$, από όπου με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\upsilon'_2 = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Ελέγχουμε αν διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος, δηλαδή αν ισχύει

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^{'2} \text{ ή } \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = \upsilon_1^{'2} + \upsilon_2^{'2}$$

Όμως $\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = 20^2 + 10^2 = 500 \quad \text{και} \quad \upsilon_1^{'2} + \upsilon_2^{'2} = 15^2 + 15^2 = 450$

Άρα, αφού η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται η κρούση είναι ελαστική.

Ερώτηση 16.

Σφαίρα A που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου υ και κινητική ενέργεια K, συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα B, ίσης μάζας με την A, που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίση με

α) $0,25K$.

β) $0,5K$.

γ) $0,75K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα:

$$(m_1 + m_2)V = m_1\upsilon + 0 \Rightarrow 2mV = m\upsilon \Rightarrow V = \frac{\upsilon}{2}$$

$$K_{\sigma\upsilon\sigma\omega\mu} = \frac{(m+m)V^2}{2} = mV^2 \quad \Rightarrow K_{\sigma\upsilon\sigma\omega\mu} = m\frac{\upsilon^2}{4} = \frac{K}{2} \Rightarrow K_{\sigma\upsilon\sigma\omega\mu} = 0,5K$$

Ερώτηση 17.

Ένα ακίνητο βλήμα εκρήγνυται σε τρία μέρη A, B και Γ. Τα μέρη A και B έχουν ορμές που βρίσκονται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους με μέτρα που είναι ίσα με: $p_1 = p_2 = p = 20\dfrac{Kgm}{s}$.

Το μέτρο της ορμής του τρίτου κομματιού είναι:

α) $10\dfrac{Kgm}{s}$.

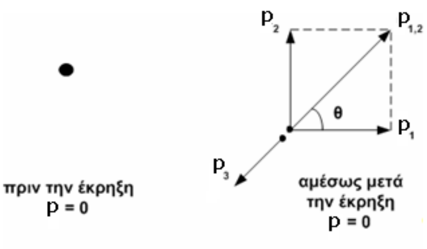
β) $20\dfrac{Kgm}{s}$.

γ) $20\sqrt{2}\dfrac{Kgm}{s}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.



Επειδή η ορμή διατηρείται θα ισχύει

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_3 = -\vec{p}_{12} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι οι κατευθύνσεις των $\vec{p}_3$ και $\vec{p}_{12}$ θα είναι αντίθετες.

Το μέτρο της ορμής $\vec{p}_{12}$ είναι:

$$p_{12} = \sqrt{p_1{}^2 + p_2{}^2} = \sqrt{2p^2} = p\sqrt{2} \Rightarrow p_{12} = 20\sqrt{2}\frac{Kgm}{s}$$

Άρα το μέτρο της ορμής του 3ου κοματιού είναι $p_3 = 20\sqrt{2}\ Kg\dfrac{m}{s}$

Ερώτηση 18.

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h πάνω από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K. Η κίνηση του σώματος γίνεται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου χωρίς τριβές και αντιστάσεις από τον αέρα. Η κίνηση του σώματος για όσο χρονικό διάστημα είναι σε επαφή με το ελατήριο είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

Η μεταβολή της ορμής p του σώματος από τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και μέχρι να επανέλθει στο ίδιο σημείο έχει μέτρο

α) 0.

β) p.

γ) $2p$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

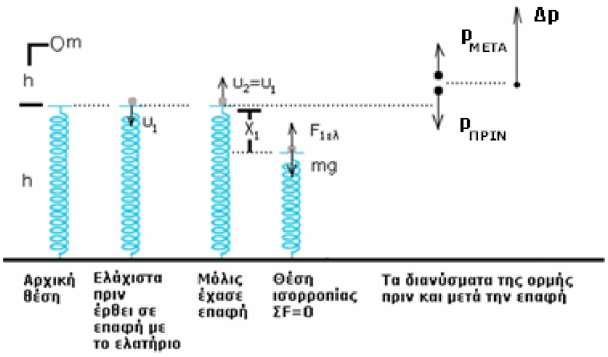
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του είναι συντηρητικές (βάρος και δύναμη ελατηρίου), άρα η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της ταχύτητάς του ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την επαφή του με το ελατήριο θα είναι ίδια αφού στην ίδια θέση θα έχει ίδια κινητική και δυναμική ενέργεια.

Συνεπώς η μεταβολή της ορμής του θα είναι:

$$\overrightarrow{\Delta p} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - \vec{p}_{\pi\rho\iota\nu}$$

Τα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση, ορίζουμε θετική φορά προς τα πάνω, μετατρέπουμε τη διανυσματική σχέση σε αλγεβρική και λαμβάνουμε υπόψη ότι $\left|\vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\right| = \left|\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu}\right| = p$

Προκύπτει $\Delta p = p - (-p) = 2p$. Η κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{\Delta p}$ θα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω.


m
h
h
u1
u2=u1
x1
F1ελ
mg
pΜΕΤΑ
pΠΡΙΝ
Δp
Αρχική θέση
Ελάχιστα πριν έρθει σε επαφή με το ελατήριο
Μόλις έχασε επαφή
Θέση ισορροπίας ΣF=0
Τα διανύσματα της ορμής πριν και μετά την επαφή

Ερώτηση 19.

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h πάνω από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K. Η κίνηση του σώματος γίνεται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου χωρίς τριβές και αντιστάσεις από τον αέρα. Η κίνηση του σώματος για όσο χρονικό διάστημα είναι σε επαφή με το ελατήριο είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι μέγιστο.

α) τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

β) στη θέση όπου η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται είναι μηδέν.

γ) στη θέση μέγιστης συσπείρωσης.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Από τη στιγμή που το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο εκτός από το βάρος του ασκείται και η δύναμη του ελατηρίου με φορά προς τα πάνω. Παίρνοντας τα θετικά προς τα κάτω ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής γράφεται:

$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow mg - F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = m\alpha \Rightarrow mg - kx = m\alpha$, όπου x η παραμόρφωση του ελατηρίου.

Καθώς το σώμα κατεβαίνει το x μεγαλώνει. Επομένως η επιτάχυνση α μικραίνει. Συνεχίζει όμως να αυξάνεται η ταχύτητα του σώματος, αλλά με μικρότερο ρυθμό.

Κάποια στιγμή θα γίνει $\Sigma F = 0$, στη θέση αυτή η ταχύτητα θα είναι μέγιστη και η επιτάχυνση ίση με το μηδέν. Στη συνέχεια, επειδή το x αυξάνεται, η kx θα γίνει μεγαλύτερη από το βάρος, η επιτάχυνση θα γίνει αρνητική και το σώμα θα αρχίσει να επιβραδύνεται.

Άρα το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι μέγιστο στη θέση που ισχύει $\Sigma F = 0$.

Ερώτηση 20.

Μια μπάλα αφήνεται να πέσει κατακόρυφα στο έδαφος με ορμή $10\frac{\text{Kgm}}{\text{s}}$ και αναπηδά με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Ο χρόνος πρόσκρουσης είναι $0,5\text{s}$.

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής της μπάλας στη διάρκεια της κρούσης σε $\frac{\text{Kgm}}{\text{s}^2}$ έχει μέτρο ίσο με

α) 40.

β) 20.

γ) 10.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

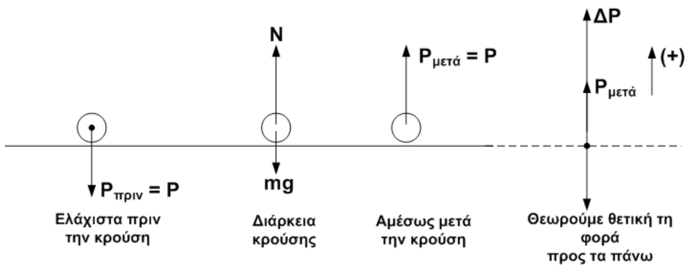
Σωστή απάντηση είναι η α.

Η μπάλα στη διάρκεια της κρούσης δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα και γι αυτό μεταβάλλεται η ορμή της.

Η μεταβολή της ορμής θα είναι: $\overrightarrow{\Delta p} = \vec{p}_{(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} - \vec{p}_{(\pi\rho\iota\nu)}$ (1)

Επειδή τα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση ορίζουμε φορά (θετική προς τα πάνω) και μετατρέπουμε τη διανυσματική σχέση σε αλγεβρική:

$$\Delta p = p - (-p) = 2p = 2 \cdot 10\frac{\text{Kgm}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p = 20\frac{\text{Kgm}}{\text{s}}$$



$$\frac{\overline{\Delta p}}{\Delta t} = \frac{20\frac{\text{Kgm}}{\text{s}}}{0,5\text{s}} \Rightarrow \frac{\overline{\Delta p}}{\Delta t} = 40\frac{\text{Kgm}}{\text{s}^2}$$

Ερώτηση 21.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον κ. Παλόγο Αντώνιο)

Μια ηχητική πηγή κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_s προς ακίνητο παρατηρητή. Τα μήκη κύματος που εκπέμπει η πηγή προς την κατεύθυνση του παρατηρητή, πριν και μετά τη διέλευση της από αυτόν, διαφέρουν μεταξύ τους κατά $\frac{\lambda}{10}$, όπου λ το μήκος κύματος που εκπέμπει η πηγή όταν είναι ακίνητη. Αν υ η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα, ο λόγος $\frac{\upsilon_s}{\upsilon}$ είναι

α) $\frac{1}{5}$.

β) $\frac{1}{10}$.

γ) $\frac{1}{20}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Το μήκος κύματος που εκπέμπει η πηγή προς τον παρατηρητή είναι ίσο με την απόσταση που αυτός «αντιλαμβάνεται» ως μήκος κύματος.

Όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή αυτός «αντιλαμβάνεται» ως μήκος κύματος την απόσταση $\lambda_A = \lambda - \upsilon_s T_s$, όπου T_s η περίοδος του ηχητικού κύματος.

Όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή αυτός «αντιλαμβάνεται» ως μήκος κύματος την απόσταση $\lambda_B = \lambda + \upsilon_s T_s$.

Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων προκύπτει:

$$\lambda_B - \lambda_A = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow (\lambda + \upsilon_s T_s) - (\lambda - \upsilon_s T_s) = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow 2\upsilon_s T_s = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow 2\upsilon_s \frac{1}{f_s} = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow$$

$$2\upsilon_s = \frac{\upsilon}{10} \Rightarrow \frac{\upsilon_s}{\upsilon} = \frac{1}{20}$$

Ερώτηση 22.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον κ. Παλόγο Αντώνιο)

Ένας παρατηρητής απομακρύνεται από ακίνητη ηχητική πηγή με σταθερή ταχύτητα υ_A. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μειωμένη σε σχέση με αυτή που εκπέμπει η πηγή. Το μήκος κύματος λ_A του ήχου που φτάνει στον παρατηρητή σε σχέση με το μήκος κύματος λ που εκπέμπει η πηγή είναι

α) $\lambda_A < \lambda$.

β) $\lambda_A > \lambda$.

γ) $\lambda_A = \lambda$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Ένας ακίνητος παρατηρητής γράφει τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής ως εξής: $\upsilon = \lambda f_s$ (1)

Ο κινούμενος παρατηρητής γράφει τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής ως εξής: $\upsilon_{\acute{\eta}\chi o\upsilon(A)} = \lambda_A f_A$ (2)

Όμως:

- $\upsilon_{\acute{\eta}\chi o\upsilon(A)} = \upsilon - \upsilon_A$, όπου υ η ταχύτητα διάδοσης του ήχου για τον ακίνητο παρατηρητή.
- $f_A = f_s \dfrac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon}$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε

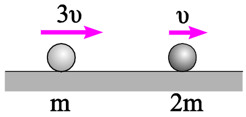
$$\upsilon_{\acute{\eta}\chi o\upsilon(A)} = \lambda_A f_A \Rightarrow \upsilon - \upsilon_A = \lambda_A \cdot f_s \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \lambda_A f_s$$

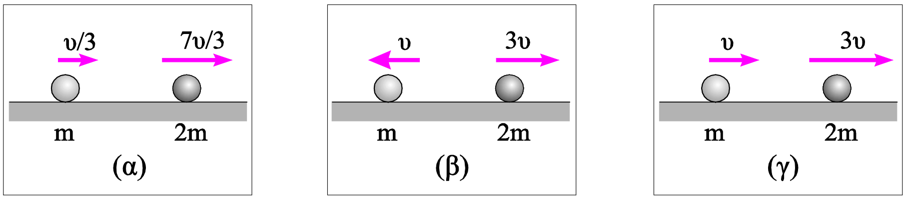
Από τη σύγκριση της τελευταίας σχέσης με την (1) προκύπτει ότι $\lambda_A = \lambda$.

Ερώτηση 23.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Ποντικό Ηλία)

Η κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών του σχήματος είναι κεντρική και ελαστική. Οι σφαίρες μετά την κρούση θα κινηθούν όπως στο σχήμα





Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστό είναι το σχήμα (α).

Για την κρούση ισχύει η διατήρηση της ορμής.

Οι σφαίρες του σχήματος της εκφώνησης έχουν πριν την κρούση συνολική ορμή $p_{αρχ} = m \cdot 3υ + 2m \cdot υ \;\Rightarrow p_{αρχ} = 5mυ$

Άρα και η τελική ορμή του συστήματος των σφαιρών πρέπει να είναι $p_{τελ} = 5 \cdot mυ$

Στο σχήμα (α) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ορμή

$$p_{τελ} = 2m\frac{7υ}{3} + m\frac{υ}{3} \;\Rightarrow p_{τελ} = 5mυ$$

Στο σχήμα (β) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ορμή

$$p_{τελ} = 2m \cdot 3υ - mυ \;\Rightarrow p_{τελ} = 5mυ$$

Στο σχήμα (γ) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ορμή

$$p_{τελ} = 2m \cdot 3υ + mυ \;\Rightarrow p_{τελ} = 7mυ$$

Άρα, η διατήρηση της ορμής ικανοποιείται μόνο στα σχήματα (α) και (β).

Η κρούση είναι ελαστική. Επομένως θα πρέπει επίσης να διατηρείται και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

Πριν την κρούση οι σφαίρες έχουν κινητική ενέργεια

$$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\cdot(3\upsilon)^2 + \frac{1}{2}2m\cdot\upsilon^2 \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = \frac{11}{2}m\upsilon^2$$

Στο σχήμα (α) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν κινητική ενέργεια:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{\upsilon}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}2m\cdot\left(\frac{7\upsilon}{3}\right)^2 \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{11}{2}m\upsilon^2$$

Στο σχήμα (β) μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν κινητική ενέργεια:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2 + \frac{1}{2}2m\cdot(3\upsilon)^2 \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{19}{2}m\upsilon^2$$

Παρατηρούμε ότι η διατήρηση της ορμής και η διατήρηση της κινητικής ενέργειας ικανοποιούνται μόνο στο σχήμα (α).

Ερώτηση 24.

Ένα σώμα A μάζας M είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα άλλο σώμα B μάζας m, που κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται πλαστικά κεντρικά με το σώμα A. Αν μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει το $\frac{1}{3}$ της κινητικής ενέργειας που είχε ελάχιστα πριν την κρούση, τότε μεταξύ των μαζών των σωμάτων ισχύει η σχέση

α) $\frac{M}{m}=6$.

β) $\frac{M}{m}=2$.

γ) $\frac{M}{m}=3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Δίνεται ότι: $\frac{K_{ολ}^{τελ}}{K_{ολ}^{αρχ}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\frac{(M+m)V^2}{2}}{\frac{mυ^2}{2}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V^2}{υ^2}=\frac{m}{3(M+m)}$ (1)

Εφαρμόζουμε τη Διατήρησης της Ορμής για την κρούση, οπότε παίρνουμε:

$p_{ολ}^{τελ}=p_{ολ}^{αρχ} \Rightarrow (M+m)V=mυ \Rightarrow \frac{V}{υ}=\frac{m}{M+m}$ (2)

Αφού υψώσουμε την (2) στο τετράγωνο την εξισώνουμε με τη (1), οπότε προκύπτει:

$\frac{m}{3(M+m)}=\frac{m^2}{(M+m)^2} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{m}{(M+m)} \Rightarrow 2m=M$ άρα $\frac{M}{m}=2$.

Ερώτηση 25.

Μεταξύ δύο ακίνητων παρατηρητών B και A κινείται πηγή S με σταθερή ταχύτητα υ_s πλησιάζοντας προς τον A. Τα μήκη κύματος που φτάνουν στους παρατηρητές A και B είναι λ_A και λ_B αντίστοιχα. Όταν η πηγή είναι ακίνητη εκπέμπει ήχο μήκους κύματος λ. Το μήκος κύματος λ και τα μήκη κύματος λ_A και λ_B συνδέονται με τη σχέση

α) $\lambda = \dfrac{(\lambda_A + \lambda_B)}{2}$.

β) $\lambda = \dfrac{(\lambda_A - \lambda_B)}{2}$.

γ) $\lambda = \dfrac{\lambda_A \lambda_B}{(\lambda_A + \lambda_B)}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Ο παρατηρητής A, που τον πλησιάζει η πηγή, «αντιλαμβάνεται» ως μήκος κύματος την απόσταση $\lambda_A = \lambda - \upsilon_s T_s$, όπου T_s η περίοδος του ηχητικού κύματος.

Ο παρατηρητής B, που απομακρύνεται από αυτόν η πηγή, «αντιλαμβάνεται» ως μήκος κύματος την απόσταση $\lambda_B = \lambda + \upsilon_s T_s$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο σχέσεων προκύπτει

$$\lambda_A + \lambda_B = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{(\lambda_A + \lambda_B)}{2}$$

Ερώτηση 26.

Μια μικρή σφαίρα $Σ_1$, μάζας m_1, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα $Σ_2$, μάζας m_2. Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις και τα μέτρα των ταχυτήτων τους $υ'_1$ και $υ'_2$ αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $|υ'_1| = 2|υ'_2|$. Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών $\frac{m_1}{m_2}$, είναι ίσος με:

α) 1.

β) $\frac{1}{5}$.

γ) 5.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Έχουμε ελαστική κρούση δύο σωμάτων από τα οποία το ένα αρχικά είναι ακίνητο, οπότε οι ταχύτητές τους μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$υ'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1$$

$$υ'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1$$

Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετες φορές. Όπως προκύπτει από τις πιο πάνω σχέσεις το σώμα $Σ_2$ θα έχει ίδια φορά με αυτή που είχε πριν την κρούση το $Σ_1$. Συνεπώς για τα μέτρα των ταχυτήτων θα ισχύει:

$$-υ'_1 = 2υ'_2 \Rightarrow -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1 = 2\frac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1 .$$

Από όπου προκύπτει: $-m_1 + m_2 = 4m_1 \Rightarrow m_2 = 5m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5}$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένα σώμα Α μάζας $m_1 = 10kg$, κινούμενο με ταχύτητα υ_1 πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$, συγκρούεται με ακίνητο σώμα Β.

Α) Αν η κρούση είναι μετωπική και ελαστική και τα δύο σώματα μετά την κρούση έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου, να βρείτε:

1) τη μάζα του σώματος Β.

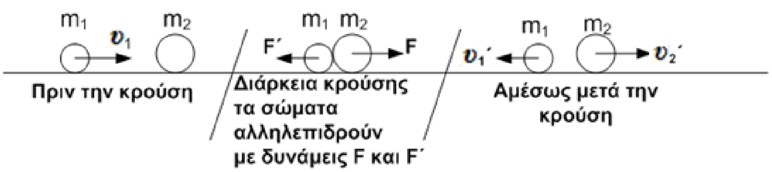
2) την % μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α.

Β) Αν η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική και η ταχύτητα του σώματος Α είναι $\upsilon_1 = 4\dfrac{m}{s}$ να υπολογίσετε:

1) Την κοινή τους ταχύτητα.

2) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων, πριν και μετά την κρούση.

<u>Λύση</u>



α)

1) Έχουμε ελαστική κρούση δύο σωμάτων που το ένα αρχικά είναι ακίνητο, οπότε οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon_1{}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (1)$$

$$\upsilon_2{}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (2)$$

Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση, αλλά δεν διευκρινίζεται αν έχουν ίδιες ή αντίθετες κατευθύνσεις. Έτσι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) να κινηθούν με την ίδια φορά:

Θέτουμε $\upsilon_1' = \upsilon_2'$, δηλαδή $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$, η επίλυση της σχέσης δίνει $m_1 = -m_2$, που είναι άτοπο. Άρα τα δύο σώματα δεν μπορεί να κινηθούν με ίδιες φορές, μετά την κρούση.

ii) να κινηθούν με αντίθετες φορές:

Θέτουμε $\upsilon_1' = -\upsilon_2'$, δηλαδή $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$, η επίλυση της σχέσης δίνει: $m_2 = 3m_1 \Rightarrow m_2 = 30\mathrm{kg}$, που είναι το σωστό.

2) Με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) και (2) τις τιμές των μαζών $m_1 = 10\mathrm{kg}$ και $m_2 = 30\mathrm{kg}$ προκύπτει

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{10\mathrm{kg} - 30\mathrm{kg}}{10\mathrm{kg} + 30\mathrm{kg}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = -\frac{\upsilon_1}{2}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2 \cdot 10\mathrm{kg}}{10\mathrm{kg} + 30\mathrm{kg}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{\upsilon_1}{2}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α είναι:

$$\Delta K_1 = K_1' - K_1 = \frac{m_1\upsilon_1'^2}{2} - \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} \Rightarrow \Delta K_1 = \frac{m_1(\frac{\upsilon_1}{2})^2}{2} - \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} \Rightarrow \Delta K_1 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{m_1\upsilon_1^2}{2}$$

Η εκατοστιαία μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α υπολογίζεται ως εξής:

$$a\% = \frac{\Delta K_1}{K_1}100\% = -\frac{3}{4}100\% \Rightarrow a\% = -75\%$$

Β) 1) Η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος βρίσκεται εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ορμής για την κρούση.

$$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{10\mathrm{kg} \cdot 4\mathrm{m/s}}{10\mathrm{kg} + 30\mathrm{kg}} \Rightarrow V = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} - \frac{m_1 \upsilon_1{}^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{(10kg + 30kg)\cdot(1m/s)^2}{2} - \frac{10kg \cdot (4m/s)^2}{2} \Rightarrow \Delta K = -60J$$

Άσκηση 2.

(Η άσκηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Παπαδημητρίου Αθανάσιο)

Ένα σώμα $Σ_1$, μάζας m_1, κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $υ_1 = 5m/s$ κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα $Σ_2$, μάζας m_2. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του επιπέδου και κάθε σώματος είναι $μ = 0,5$. Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα μάζας $Σ_1$ κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου $υ_1' = 3m/s$.

α) Να προσδιορίσετε το λόγο των μαζών $\dfrac{m_1}{m_2}$.

β) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρείτε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ που μεταβιβάστηκε στο σώμα $Σ_2$, λόγω της κρούσης.

δ) Να υπολογίσετε πόσο θα απέχουν τα σώματα όταν σταματήσουν.

Δίνεται $g = 10m/s^2$.

Λύση

α) Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οπότε οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1 \quad (1)$$

$$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση, στο S.I., στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$-3 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 5 \Rightarrow -3m_1 - 3m_2 = 5m_1 - 5m_2 \Rightarrow 2m_2 = 8m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$$

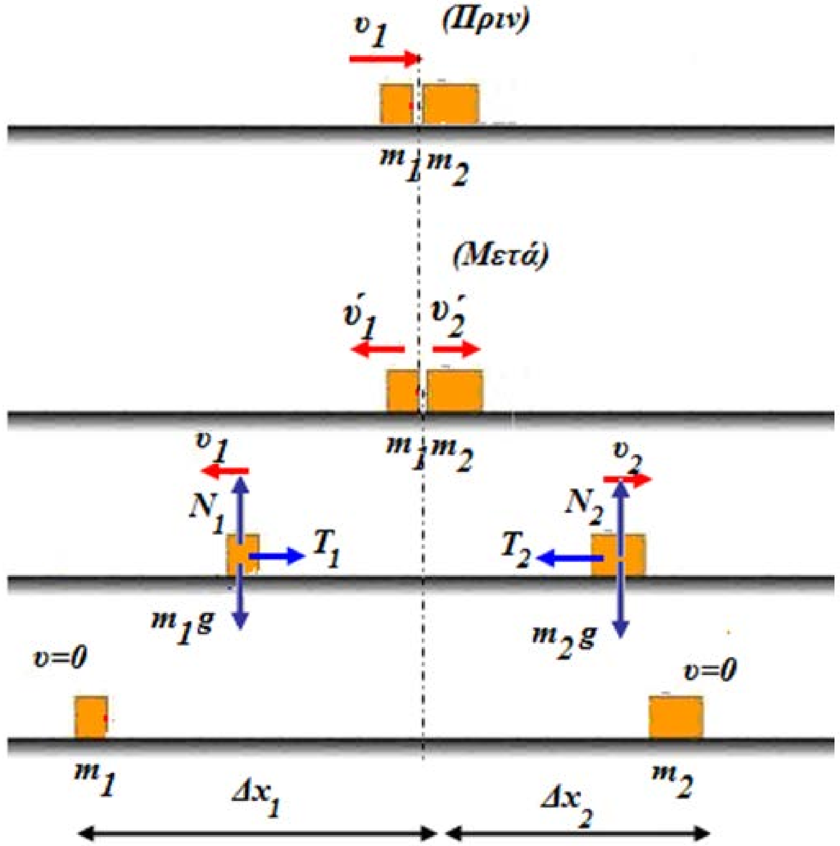
β) Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + 4m_1} \cdot 5\frac{m}{s} \Rightarrow υ_2' = 2\frac{m}{s}$$

γ) Η κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα $Σ_2$ κατά την κρούση είναι ίση με την κινητική ενέργεια που απέκτησε το σώμα αυτό, ακριβώς μετά την κρούση. Έτσι το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ που μεταβιβάστηκε στο σώμα $Σ_2$, λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2'}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = \frac{4m_1(2m/s)^2}{m_1(5m/s)^2}100\% \Rightarrow \frac{K_2'}{K_1}100\% = 64\%$$

δ) Μετά την κρούση και λόγω της ύπαρξης των τριβών καθένα από τα δύο σώματα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση και τελικά σταματά.



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για κάθε σώμα χωριστά.

$$0-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = W_{m_1g}+W_{N_1}+W_{T_1} \Rightarrow -\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -T_1\cdot\Delta x_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \mu m_1 g\Delta x_1 \text{ ή}$$

$$\Delta x_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2\mu g} = \frac{(3m/s)^2}{2\cdot 0,5\cdot 10m/s^2} \Rightarrow \Delta x_1 = 0,9m$$

$$0-\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = W_{m_2g} + W_{N_2} + W_{T_2} \Rightarrow -\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -T_2 \cdot \Delta x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \mu m_2 g \Delta x_2$$ ή

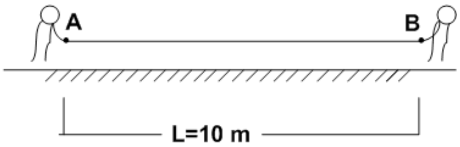
$$\Delta x_2 = \frac{\upsilon_2'^2}{2\mu g} = \frac{(2m/s)^2}{2\cdot 0,5\cdot 10m/s^2} \Rightarrow \Delta x_2 = 0,4m$$

(Τα έργα των βαρών και των κάθετων αντιδράσεων είναι μηδενικά, διότι οι δυνάμεις αυτές είναι κάθετες στις αντίστοιχες μετατοπίσεις)

Η τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι: $S = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1,3m$

Άσκηση 3.

Δύο μαθητές παγοδρόμοι Α και Β, με μάζες αντίστοιχα $m_1 = 40Kg$ και $m_2 = 60Kg$, κρατούν τις άκρες ενός σχοινιού αμελητέας μάζας. Οι μαθητές στέκονται αρχικά ακίνητοι πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο (παγοδρόμιο) απέχοντας μεταξύ τους $L = 10m$. Κάποια στιγμή οι μαθητές αρχίζουν να μαζεύουν το σχοινί ασκώντας δύναμη ο ένας στον άλλον, χωρίς να πέσει κανείς από τους δύο.



α) Να βρείτε ποια είναι η σχέση μεταξύ των δυνάμεων που ασκεί ο ένας μαθητής στον άλλο μέσω του σχοινιού.

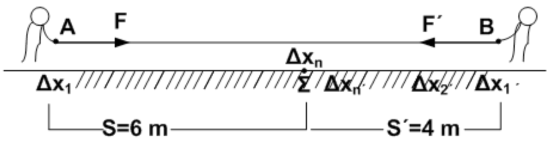
β) Να βρείτε τον λόγο των κινητικών ενεργειών που έχουν οι μαθητές ελάχιστα πριν τη στιγμή της συνάντησης.

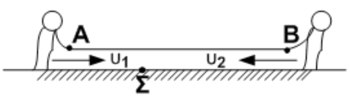
γ) Αν ελάχιστα πριν τη στιγμή της συνάντησης, ο μαθητής Α έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 2\frac{m}{s}$, ποιό θα είναι το μέτρο της ταχύτητας του μαθητή Β;

δ) Αν οι μαθητές τη στιγμή της σύγκρουσης αγκαλιαστούν και παραμείνουν αγκαλιασμένοι ποια θα είναι η κοινή τους ταχύτητα;

<u>Λύση</u>

α)





Οι δυνάμεις F και F' που ασκεί ο ένας μαθητής στον άλλο μέσω του σχοινιού είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα μαθητές - σχοινί. Κάθε μαθητής ασκεί και δέχεται δύναμη από το σχοινί (δράση – αντίδραση). Επειδή το σχοινί είναι μη εκτατό η δύναμη μεταφέρεται από το ένα άκρο του σχοινιού στο άλλο και το μέτρο της είναι σταθερό. Συνεπώς σύμφωνα με τον 3^o Νόμο του Νεύτωνα οι δυνάμεις που ασκούνται στους μαθητές από το σχοινί θα είναι αντίθετες. (Στο σχήμα παραβλέπονται οι δυνάμεις που ασκούν οι μαθητές στο σχοινί).

β) Το σύστημα μαθητές – σχοινί είναι ένα μονωμένο σύστημα σωμάτων. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ορμής μεταξύ των δύο θέσεων:

$$\vec{p}_{Τελ} = \vec{p}_{Αρχ} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

Οι μαθητές ελάχιστα πριν τη συνάντησή τους έχουν αντίθετες ορμές και για τα μέτρα των ορμών τους ισχύει:

$$p_1 = p_2 = p \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το β΄ μέλος του τύπου της κινητικής ενέργειας με τη μάζα m βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την κινητική ενέργεια με την ορμή:

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m^2\upsilon^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad (2)$$

Ο ζητούμενος λόγος των κινητικών ενεργειών είναι:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{p_1^2}{2m_1}}{\frac{p_2^2}{2m_2}} = \frac{\frac{p^2}{2m_1}}{\frac{p^2}{2m_2}} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{60kg}{40kg} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{2}$$

γ) Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 = \frac{40kg}{60kg} \cdot 2\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{4}{3}\frac{m}{s}$$

δ) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ορμής μεταξύ των θέσεων λίγο πριν συναντηθούν και αμέσως μετά τη συνάντηση.

$p_{Αρχ} = p_{Τελ} \Rightarrow m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V$ από όπου προκύπτει $V = \dfrac{(m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2)}{(m_1 + m_2)} = 0$

Άσκηση 4.

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2, αμελητέων διαστάσεων, με μάζες $m_1 = 1Kg$ και $m_2 = 3Kg$ αντίστοιχα είναι τοποθετημένα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στη μία άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\frac{N}{m}$. Η άλλη άκρη του ελατηρίου, είναι ακλόνητα στερεωμένη. Το ελατήριο με τη βοήθεια νήματος είναι συσπειρωμένο κατά $0,2m$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα Σ_2 βρίσκεται ακίνητο στο οριζόντιο επίπεδο στη θέση που αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος ℓ_0 του ελατηρίου. Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα Σ_1 κινούμενο προς τα αριστερά συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα Σ_2, αν θεωρήσουμε τις διαστάσεις των σωμάτων αμελητέες, να υπολογίσετε:

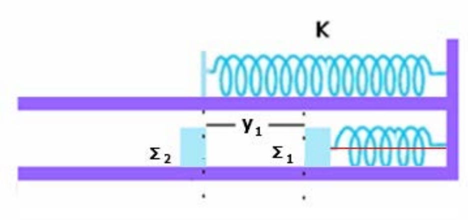
α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 λίγο πριν την κρούση του με το σώμα Σ_2.

β) το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση.

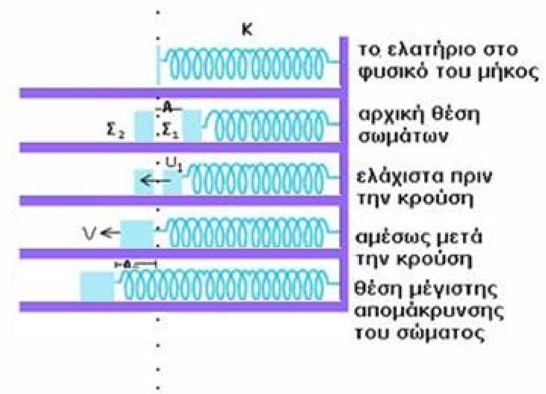
γ) το ποσό θερμότητας που μεταφέρθηκε από τα σώματα στο περιβάλλον.

δ) το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Δίνεται $\pi = 3,14$.



Λύση



α) Η κίνηση του σώματος Σ_1 από την στιγμή της ελευθέρωσης μέχρι και ελάχιστα πριν τη σύγκρουσή του με το Σ_2 είναι α.α.τ. με πλάτος $A = 0,2m$. Η ταχύτητά του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση θα βρεθεί από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ των δύο θέσεων. Η αρχική του θέση είναι στη μέγιστη απομάκρυνση και η τελική θέση είναι η θέση ισορροπίας του.

$$\frac{kA^2}{2}=\frac{m_1\upsilon_1^{\ 2}}{2}\Rightarrow \upsilon_1=\sqrt{\frac{kA^2}{m_1}}=\sqrt{\frac{100\frac{N}{m}\cdot(0,2m)^2}{1kg}}\Rightarrow \upsilon_1=2\frac{m}{s}$$

β) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Ορμής (Α.Δ.Ο) για την κρούση:

$m_1\upsilon_1=(m_1+m_2)V$, από όπου προκύπτει

$$V=\frac{m_1\upsilon_1}{(m_1+m_2)}=\frac{1kg\cdot 2m/s}{(1kg+3kg)}\Rightarrow V=0,5\frac{m}{s}$$

γ) Με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η θερμότητα ισούται με την μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος:

$$Q=\left|\Delta K\right|=\frac{m_1\upsilon_1^{\ 2}}{2}-\frac{(m_1+m_2)V^2}{2}\Rightarrow Q=2J-0,5J=1,5J$$

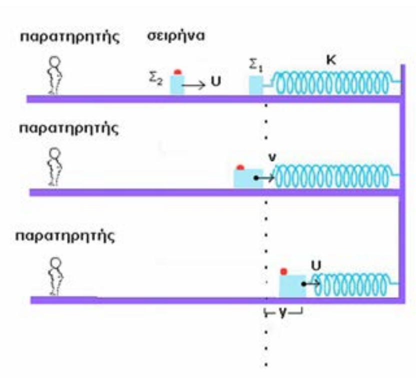
δ) Το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας ίδια με την αρχική. Εφαρμόζουμε τη διατήρησης της ενέργειας για τη νέα ταλάντωση μεταξύ της θέσης ισορροπίας και της ακραίας θέσης.

$$\frac{(M+m)V^2}{2}=\frac{kA_0^{\ 2}}{2}\Rightarrow A_0=\sqrt{\frac{M+m}{k}}V=\sqrt{\frac{3kg+1kg}{100N/m}}\cdot(0,5\frac{m}{s})\Rightarrow A=0,1m$$

Άσκηση 5.

Σώμα Σ_1, με μάζα $m_1 = 4Kg$, είναι στερεωμένο στη μία άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 500\frac{N}{m}$, το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται σε κατακόρυφο τοίχο.

Το σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 1Kg$ κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 10\frac{m}{s}$ κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου, συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα Σ_1, όπως στο σχήμα. Το σώμα Σ_2 έχει ενσωματωμένη σειρήνα που εκπέμπει συνεχώς ήχο συχνότητας $f_s = 700Hz$.



α) Να υπολογίσετε τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής του σχήματος, πριν από την κρούση του σώματος Σ_2 με το σώμα Σ_1.

β) Να υπολογίσετε την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης μετά την κρούση.

γ) Να γράψετε την ταχύτητα υ του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Για την περιγραφή αυτή να θεωρήσετε ως αρχή μέτρησης του χρόνου $(t = 0)$ τη στιγμή της κρούσης και ως θετική φορά του άξονα των απομακρύνσεων τη φορά της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

δ) Αν η σειρήνα δεν καταστρέφεται κατά την κρούση, να βρείτε το πηλίκο της μέγιστης συχνότητας $f_{A,max}$ προς την ελάχιστη συχνότητα $f_{A,min}$ που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Δίνονται η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα $\upsilon_{\eta\chi} = 340\frac{m}{s}$ και $g = 10\frac{m}{s^2}$.

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε πηγή που απομακρύνεται από ακίνητο παρατηρητή. Η εξίσωση που περιγράφει τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής A είναι $f_A = \dfrac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f_s$, από όπου με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$f_A = \frac{340\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s}} \cdot 700\mathrm{Hz} \Rightarrow f_A = 680\mathrm{Hz}\ .$$

β) Το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\mathrm{kg} + 4\mathrm{kg}}{500\mathrm{N/m}}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\mathrm{s}$$

και γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \dfrac{5}{\pi} s^{-1} \Rightarrow \omega = 10\dfrac{\mathrm{rad}}{s}$

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την κρούση.

$$p_{\Pi\rho\iota\nu} = p_{M\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m_1\upsilon = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon}{(m_1 + m_2)} = \frac{1\mathrm{kg} \cdot 10\frac{m}{s}}{(1\mathrm{kg} + 4\mathrm{kg})} \Rightarrow V = 2\frac{m}{s}$$

Η ταχύτητα $V = 2\dfrac{m}{s}$ είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, επειδή η θέση αυτή είναι και θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Συνεπώς $V = \omega A$, από όπου με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$A = \frac{V}{\omega} = \frac{2\frac{m}{s}}{10\frac{\mathrm{rad}}{s}} \Rightarrow A = 0,2\mathrm{m}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το συσσωμάτωμα ξεκινά ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, οπότε η συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα του σε σχέση με το χρόνο είναι:

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \upsilon = 2\sigma\upsilon\nu 10t\ \ (\mathrm{S.I.})$$

δ) Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τη μέγιστη συχνότητα όταν το συσσωμάτωμα, με την πηγή, τον πλησιάζει με τη μέγιστη ταχύτητα, δηλαδή με $2\mathrm{m/s}$.

$$f_{A,max} = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s} f_s = \frac{340}{340-2} 700\text{Hz} \Rightarrow f_{A,max} = \frac{340}{338} 700\text{Hz}$$

Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται την ελάχιστη συχνότητα όταν το συσσωμάτωμα, με την πηγή, απομακρύνεται από αυτόν με την μέγιστη ταχύτητα, δηλαδή με $2\text{m}/\text{s}$.

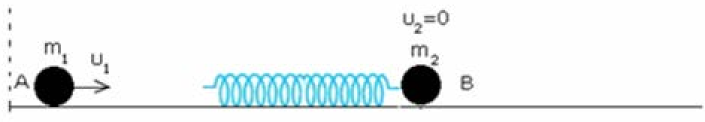
$$f_{A,min} = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f_s = \frac{340}{340+2} 700\text{Hz} \Rightarrow f_{A,min} = \frac{340}{342} 700\text{Hz}$$

Το ζητούμενο πηλίκο είναι:

$$\frac{f_{A,max}}{f_{A,min}} = \frac{\frac{340}{338} 700\text{Hz}}{\frac{340}{342} 700\text{Hz}} \Rightarrow \frac{f_{A,max}}{f_{A,min}} = \frac{342}{338}$$

Άσκηση 6.

Ένα σώμα $Σ_Α$, μάζας $m_1 = 10Kg$, κινείται με ταχύτητα $υ_1 = 4\frac{m}{s}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος $Σ_Α$ ταυτίζεται με τη διεύθυνση του άξονα ενός ιδανικού ελατηρίου το οποίο είναι στερεωμένο, όπως στο σχήμα, σε ακίνητο σώμα $Σ_Β$, μάζας $m_2 = 30Kg$. Το σώμα $Σ_Α$ προσπίπτει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου που αρχίζει να συσπειρώνεται.



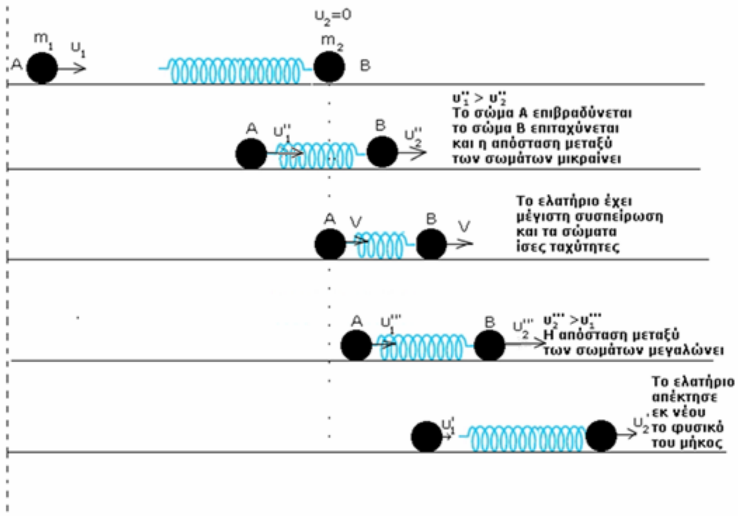
α) Να υπολογίσετε την ορμή και τη μηχανική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση.

β) Να εξηγήσετε γιατί η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου συμβαίνει τη στιγμή που τα δύο σώματα έχουν κοινή ταχύτητα.

γ) Να υπολογίσετε την κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων την στιγμή που η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι μέγιστη.

δ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποκτά το ελατήριο λόγω της παραμόρφωσης του.

<u>Λύση</u>



α) Από το σύστημα των δύο σωμάτων και του ελατηρίου πριν την 'κρούση', ορμή και μηχανική ενέργεια είχε μόνο το $Σ_Α$.

$$p_{αρχ} = m_1 υ_1 = 4kg \cdot 10m/s \Rightarrow p_{αρχ} = 40kgm/s$$

$$E_{αρχ} = K_{αρχ} + U_{αρχ} = \frac{mυ_1^2}{2} + 0 \Rightarrow E_{αρχ} = \frac{10kg \cdot (4m/s)^2}{2} \Rightarrow E_{αρχ} = 80J$$

β) Από τη στιγμή που το σώμα $Σ_A$ έρχεται σε επαφή με το ελατήριο, τότε το ελατήριο αρχίζει να συσπειρώνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα σώματα $Σ_A$ και $Σ_B$ να δέχονται δυνάμεις από το ελατήριο. Συνεπώς το σώμα $Σ_A$ να επιβραδύνεται και το $Σ_B$ να επιταχύνεται. Όμως για όσο χρόνο η ταχύτητα του $Σ_A$ είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του $Σ_B$ μειώνεται η απόσταση μεταξύ των σωμάτων (πλησιάζουν) και η παραμόρφωση του ελατηρίου μεγαλώνει, συνεπώς αυξάνεται και η δυναμική ενέργεια λόγω παραμόρφωσης. Κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους θα γίνουν ίσες, τότε η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι μέγιστη και φυσικά η απόσταση μεταξύ των σωμάτων ελάχιστη. Από τη στιγμή αυτή και μετά θα μεγαλώνει η απόσταση των σωμάτων, γιατί η ταχύτητα του $Σ_B$ εξακολουθεί να αυξάνεται και του $Σ_A$ εξακολουθεί να μειώνεται. Αυτό συνεχίζεται μέχρις ότου το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του σχήμα. Άρα τη στιγμή που τα δύο σώματα έχουν κοινή ταχύτητα το ελατήριο έχει τη μέγιστη παραμόρφωση του.

γ) Οι δυνάμεις μεταξύ σωμάτων και ελατηρίου είναι εσωτερικές, έτσι σε όλη τη διάρκεια της “κρούσης” η ορμή του συστήματος διατηρείται.

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ορμής για το σύστημα μεταξύ της θέσης που το σώμα $Σ_A$ πρόκειται να ακουμπήσει το ελατήριο και της θέσης που το ελατήριο έχει υποστεί τη μέγιστη παραμόρφωση.

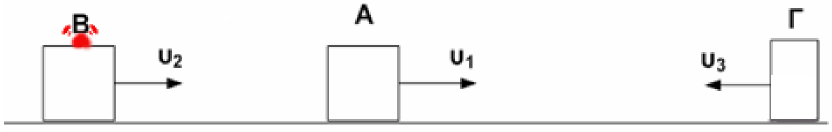
$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow p_{αρχ} = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{p_{αρχ}}{(m_1 + m_2)} = \frac{40kgm/s}{(10kg + 30kg)} \Rightarrow V = 1\frac{m}{s},$$

δ) Το δάπεδο είναι λείο και το ελατήριο ιδανικό, οπότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα μεταξύ της θέσης που το σώμα $Σ_A$ πρόκειται να ακουμπήσει το ελατήριο και της θέσης που το ελατήριο έχει υποστεί τη μέγιστη παραμόρφωση.

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + 0 = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} + U_{max} \Rightarrow$$

$$U_{max} = 80J - \frac{(10kg + 30kg)(1m/s)^2}{2} \Rightarrow U_{max} = 60J$$

Άσκηση 7.



Τα τρία οχήματα του σχήματος, A, B και $Γ$ κινούνται σε ευθύγραμμο αυτοκινητόδρομο. Τα μέτρα των ταχυτήτων τους είναι $υ_1 = 20\frac{m}{s}$, $υ_2 = 30\frac{m}{s}$ και $υ_3 = 20\frac{m}{s}$ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Τα οχήματα A και B κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση και προπορεύεται το όχημα A, ενώ το όχημα $Γ$ έρχεται από την αντίθετη κατεύθυνση. Το όχημα B εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_s = 930Hz$.

α) Να υπολογίσετε τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο οδηγός του οχήματος A.

β) Να υπολογίσετε τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο οδηγός του οχήματος $Γ$.

γ) τα οχήματα B και $Γ$ διασταυρώνονται, οπότε στη συνέχεια απομακρύνεται το ένα από το άλλο, να υπολογίσετε τη νέα συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο οδηγός του οχήματος Γ.

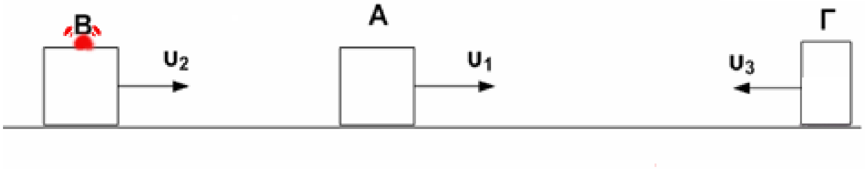
δ) Ο οδηγός του οχήματος Α τη χρονική στιγμή $t = 0$, ενώ προηγείται του οχήματος Β, πατάει γκάζι και προσδίδει στο όχημά του σταθερή επιτάχυνση $α = 2\frac{m}{s^2}$ για χρονικό διάστημα $5s$, παραμένοντας σε όλη τη διάρκεια της επιταχυνόμενης κίνησης προπορευόμενος του οχήματος Β. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της συχνότητας που αντιλαμβάνεται ο οδηγός A συναρτήσει του χρόνου σε αριθμημένους άξονες για το χρονικό διάστημα των $5s$.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα $υ = 340\frac{m}{s}$. Οι πράξεις να γίνουν με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

<u>Λύση</u>

Θα προσαρμόσουμε τη σχέση $f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \mp \upsilon_s} f_s$ στα δεδομένα κάθε ερωτήματος. Όταν ο παρατηρητής κατευθύνεται προς την πηγή, τότε στον αριθμητή ισχύει το (+), ενώ όταν απομακρύνεται (-).

Όταν η πηγή κατευθύνεται προς τον παρατηρητή, τότε στον παρονομαστή ισχύει το (-), ενώ όταν απομακρύνεται το (+).



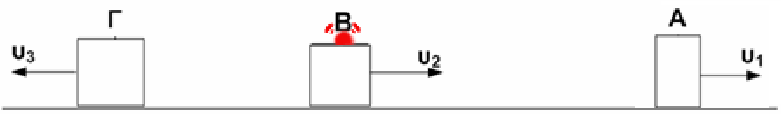
α) Για την περίπτωση του οδηγού Α έχουμε: παρατηρητή που απομακρύνεται από την πηγή με ταχύτητα υ_1, και πηγή που κατευθύνεται προς τον παρατηρητή με ταχύτητα υ_2

$$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_2} f_s = \frac{340m/s - 20m/s}{340m/s - 30m/s} \cdot 930Hz \Rightarrow f_A = 960Hz$$

β) Για την περίπτωση του οδηγού Γ έχουμε: παρατηρητή που κατευθύνεται προς την πηγή με ταχύτητα υ_3, και πηγή που κατευθύνεται προς τον παρατηρητή με ταχύτητα υ_2

$$f_\Gamma = \frac{\upsilon + \upsilon_3}{\upsilon - \upsilon_2} f_s = \frac{340m/s + 20m/s}{340m/s - 30m/s} \cdot 930Hz \Rightarrow f_\Gamma = 1080Hz$$

γ)



Στην περίπτωση αυτή έχουμε: παρατηρητή που απομακρύνεται από την πηγή με ταχύτητα υ_3, και πηγή που απομακρύνεται από τον παρατηρητή με ταχύτητα υ_2

$$f_3 = \frac{\upsilon - \upsilon_3}{\upsilon + \upsilon_2} f_s = \frac{340m/s - 20m/s}{340m/s + 30m/s} \cdot 930Hz \Rightarrow f_3 \simeq 804Hz$$

δ) Η ταχύτητα του οχήματος Α που επιταχύνεται δίνεται από τη σχέση:

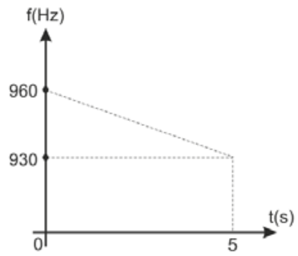
$\upsilon_A = \upsilon_1 + \alpha t \Rightarrow \upsilon_A = 20 + 2t \;(\text{S.I.})$ με $0 \le t \le 5s$,

Η εξίσωση Doppler για τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Α, ο οποίος απομακρύνεται από την πηγή αλλά η πηγή πλησιάζει προς αυτόν, με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για τα πρόσημα, είναι:

$$f = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_s} f_s = \frac{\upsilon - (\upsilon_1 + \alpha t)}{\upsilon - \upsilon_2} f_s \Rightarrow f = \frac{340 - (20 + 2t)}{340 - 30} 930 \,(\text{S.I.}) \Rightarrow$$

$f = 960 - 6t\,(\text{S.I.})$ με $0 \le t \le 5s$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Α είναι $f = 960\text{Hz}$, ενώ τη χρονική στιγμή $t = 5s$ η συχνότητα που αντιλαμβάνεται είναι $f = 930\text{Hz}$.



Άσκηση 8.

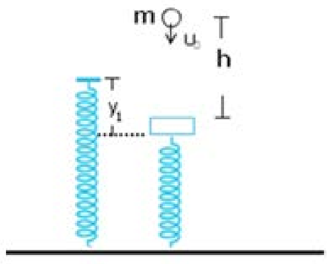
Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400\frac{N}{m}$ είναι στερεωμένος δίσκος Α μάζας $M = 4Kg$. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο και ο δίσκος ισορροπεί. Από ύψος $h = 0,25m$ πάνω από το δίσκο βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω, με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 2\frac{m}{s}$, μικρή σφαίρα Β, μάζας $m = 2Kg$. Η σφαίρα συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το δίσκο. Μετά την κρούση απομακρύνουμε τη σφαίρα ενώ ο δίσκος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η διάρκεια κρούσης θεωρείται αμελητέα, όπως και οι τριβές και οι αντιστάσεις θεωρούνται αμελητέες.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του δίσκου και της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.

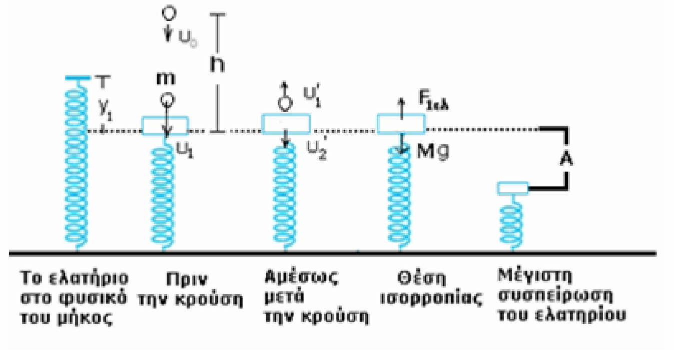
β) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του δίσκου, αν η σταθερά ταλάντωσης είναι $D = k$.

γ) Να υπολογίσετε τον χρόνο στον οποίο θα μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητα του δίσκου.

δ) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του δίσκου όταν περνάει από τη θέση ισορροπίας του.



Λύση



α) Το σώμα Β εκτελεί κατακόρυφη κίνηση προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα υ_0. Η μόνη δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι το βάρος του και επειδή είναι συντηρητική δύναμη, η μηχανική του ενέργεια διατηρείται.

Συνεπώς

$$\frac{m\upsilon_0{}^2}{2}+mgh=\frac{m\upsilon_1^2}{2}\Rightarrow \upsilon_1=\sqrt{\upsilon_0{}^2+2gh}=\sqrt{(2m/s)^2+2\cdot(10m/s^2)\cdot 0,25m}\Rightarrow \upsilon_1=3\frac{m}{s}$$

Η κρούση είναι κεντρική ελαστική με το σώμα Β ακίνητο, οπότε για τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση ισχύουν οι σχέσεις:

$$\upsilon_1'=\frac{m-M}{m+M}\cdot\upsilon_1=\frac{2kg-4kg}{2kg+4kg}\cdot 3\frac{m}{s}\ \Rightarrow\ \upsilon_1'=-1m/s$$

$$\upsilon_2'=\frac{2m}{m+M}\cdot\upsilon_1=\frac{2\cdot 2kg}{2kg+4kg}\cdot 3\frac{m}{s}\Rightarrow\ \upsilon_2'=2m/s$$

Συνεπώς ο δίσκος μετά την κρούση θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $2\frac{m}{s}$ και η σφαίρα θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $1\frac{m}{s}$.

β) Το πλάτος ταλάντωσης θα το βρούμε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση. Επειδή ο δίσκος βρίσκεται στη θέση ισορροπίας η ταχύτητα $\upsilon_2'=2m/s$ που αποκτά είναι η μέγιστη, συνεπώς η διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση γράφεται:

$$\frac{M\upsilon_2'^2}{2}=\frac{DA^2}{2}\Rightarrow A=\upsilon_2'\sqrt{\frac{M}{D}}=2\frac{m}{s}\cdot\sqrt{\frac{4kg}{400N/m}}\Rightarrow A=0,2m$$

γ) Αμέσως μετά την κρούση ο δίσκος βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και μέχρι να πάει για πρώτη φορά στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης, όπου η ταχύτητά του θα είναι μηδέν, απαιτείται χρόνος $t=\frac{T}{4}\ \ (1)$

Όμως η περίοδος ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{4kg}{400N/m}}\Rightarrow T=\frac{\pi}{5}s$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει

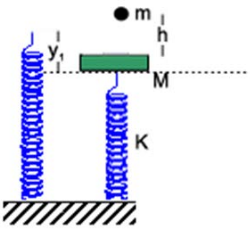
$$t = \frac{\pi}{20}\ s$$

δ) Από τη γενικευμένη μορφή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα, $\Sigma F = \frac{dp}{dt}$, προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη. Επειδή στη θέση ισορροπίας ισχύει $\Sigma F = 0$, συνεπάγεται ότι και $\frac{dp}{dt} = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400N/m$ είναι συνδεδεμένος δίσκος μάζας $M = 3kg$ που ισορροπεί. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε δάπεδο. Από ύψος $h = 0,8m$ πάνω από το δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερα μια σφαίρα μάζας $m = 1kg$, η οποία συγκρούεται πλαστικά με το δίσκο.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β) Να υπολογίσετε το % ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας, που έγινε θερμότητα στη διάρκεια της κρούσης.

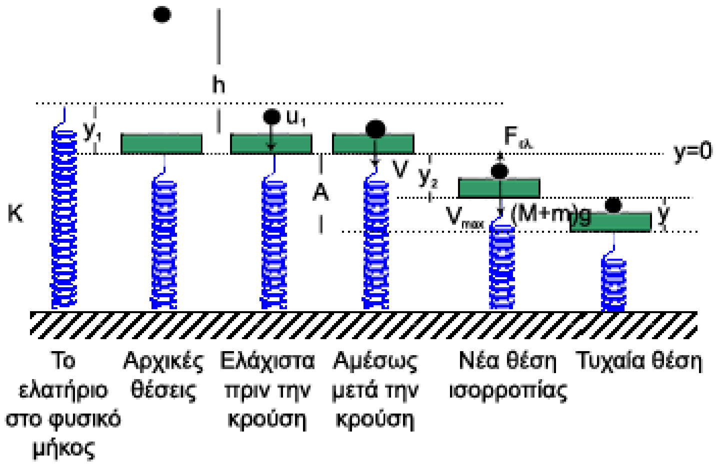
γ) Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδο ταλάντωσής του.

δ) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσής του.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\frac{m}{s^2}$ και $\sqrt{17} = 4,12$.

Λύση

α)



Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση και η μηχανική της ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και της θέσης ελάχιστα πριν την κρούση με το δίσκο.

Συνεπώς:

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \Rightarrow \frac{mυ^2}{2} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow υ = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}8m} \Rightarrow υ = 4\frac{m}{s}.$$

Για την κρούση ισχύει η διατήρηση της ορμής. Γράφουμε τη διατήρηση της ορμής μεταξύ των θέσεων ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση.

$$p_{πριν} = p_{μετά} \Rightarrow mυ_1 = (M+m)V \Rightarrow V = \frac{mυ_1}{M+m} = \frac{1kg \cdot 4\frac{m}{s}}{3kg + 1kg} \Rightarrow V = 1\frac{m}{s}$$

β) Η ενέργεια που χάθηκε από το σύστημα στη διάρκεια της κρούσης και μεταφέρθηκε στο περιβάλλον, υπό μορφή θερμότητας, είναι ίση με τη μείωση της κινητικής ενέργειας:

$$Q = K_{αρχ} - K_{τελ} = \frac{mυ^2}{2} - \frac{(M+m)V^2}{2} \Rightarrow Q = \frac{1kg \cdot (4m/s)^2}{2} - \frac{(3kg+1kg) \cdot (1m/s)^2}{2} \Rightarrow$$
$$Q = 8J - 2J \Rightarrow Q = 6J$$

συνεπώς το % ποσοστό θα είναι:

$$a\% = \frac{Q}{K_{αρχ}}100\% \Rightarrow a\% = \frac{6J}{8J}100\% \Rightarrow a\% = 75\%$$

όπου $K_{αρχ}$ η κινητική ενέργεια πριν την κρούση.

γ) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα θα ξεκινήσει να ταλαντώνεται γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας που θα είναι χαμηλότερα κατά y_2 από την αρχική θέση. Παίρνουμε μια τυχαία θέση, που απέχει y από τη θέση ισορροπίας, σημειώνουμε τις δυνάμεις και βρίσκουμε τη συνισταμένη δύναμη.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{w} + \vec{F}_{ελ}$$

Ορίζοντας φορά θετική προς τα κάτω παίρνουμε:

$$\Sigma F = (M+m)g - k(y_1 + y_2 + y) \quad (1)$$

Γράφοντας τη συνθήκη ισορροπίας για τη νέα θέση ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{ελ} = 0 \Rightarrow (M+m)g - k(y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow (M+m)g = k(y_1 + y_2) \quad (2)$$

Από το συνδυασμό της σχέσης (1) με τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\Sigma F = -ky$$

Το μείον δηλώνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει τέτοια φορά ώστε να τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση προς τα πάνω.

Συνεπώς το σώμα θα κάνει Απλή Αρμονική Ταλάντωση, με σταθερά ταλάντωσης $D = k$.

Η περίοδος ταλάντωσης θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3kg + 1kg}{400N/m}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$

δ) Το πλάτος ταλάντωσης θα το βρούμε εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας στις ταλαντώσεις. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας που έχει αμέσως μετά την κρούση. Επισημαίνεται ότι αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται υψηλότερα κατά y_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απομάκρυνση y_2 βρίσκεται από το συνδυασμό των σχέσεων που ισχύουν για τις δύο θέσεις ισορροπίας.

Για την αρχική θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow Mg - ky_1 = 0 \quad \Rightarrow Mg = ky_1 \ (3)$$

Για τη νέα θέση ισορροπίας ισχύει η σχέση (2). Από το συνδυασμό των σχέσεων (2) και (3) παίρνουμε:

$$mg = ky_2 \Rightarrow y_2 = \frac{mg}{k} = \frac{1kg \cdot 10m/s^2}{400N/m} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{40}m$$

Έτσι η διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση γράφεται:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{ky_2{}^2}{2} + \frac{(M+m)V^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{y_2{}^2 + \frac{M+m}{K}V^2} = \sqrt{(\frac{1}{40}m)^2 + \frac{3kg+1kg}{400N/m} \cdot (1m/s)^2} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\sqrt{17}}{40}m = 10,3cm$$

Πρόβλημα 2.

Σώμα Σ$_1$, μάζας $m_1 = m = 1Kg$, ισορροπεί δεμένο στην κάτω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 900\frac{N}{m}$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη σε οροφή. Ένα δεύτερο σώμα Σ$_2$ μάζας $m_2 = m = 1Kg$, βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω, με ταχύτητα $\upsilon_0 = 6\frac{m}{s}$, από σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $h = 1{,}35m$ κάτω από το σώμα Σ$_1$. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά ελαστικά και στη συνέχεια το σώμα Σ$_1$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να βρείτε:

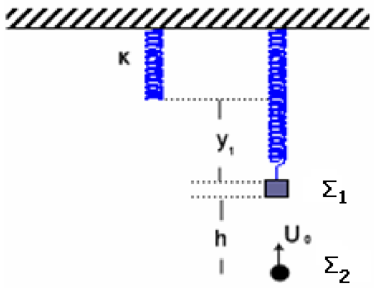
α) το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ$_1$.

β) τη θέση του σώματος Σ$_2$ τη χρονική στιγμή, που η κινητική ενέργεια του σώματος Σ$_1$ γίνεται για 1^η φορά ελάχιστη.

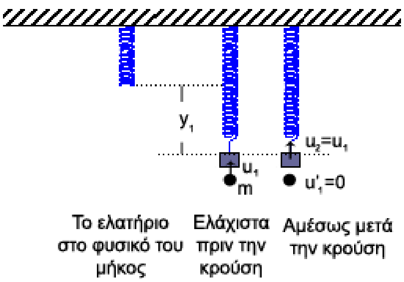
γ) το έργο της δύναμης του ελατηρίου καθώς το σώμα Σ$_1$ κινείται από τη θέση ισορροπίας του μέχρι το ψηλότερο σημείο της τροχιάς του.

δ) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος Σ$_1$, τη στιγμή που φτάνει στο ψηλότερο σημείο.

Οι αντιστάσεις λόγω των τριβών θεωρούνται αμελητέες. Δίνονται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\frac{m}{s^2}$ και $\pi^2 = 10$.



Λύση



α) Το σώμα $Σ_2$ εκτελεί κατακόρυφη κίνηση προς τα πάνω και η μόνη δύναμη που του ασκείται είναι το βάρος του, άρα η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ του σημείου εκτόξευσης και του σημείου ελάχιστα πριν την κρούση. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω βαρυτικού πεδίου, εκείνο από το οποίο ξεκινά το σώμα $Σ_2$.

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \Rightarrow \frac{mυ_0^2}{2} = \frac{mυ_1^2}{2} + mgh \Rightarrow υ_1 = \sqrt{(υ_0^2 - 2gh)} = \sqrt{(6m/s)^2 - 2\cdot(10m/s^2)\cdot 1{,}35m} \Rightarrow$$

$$υ_1 = 3m/s$$

Στη διάρκεια της κρούσης, οι εξωτερικές δυνάμεις του συστήματος των δύο σωμάτων, είναι αμελητέες σε σχέση με τις εσωτερικές δυνάμεις και κατά συνέπεια ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Η κρούση είναι κεντρική ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, άρα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Συνεπώς η ταχύτητα του $Σ_1$ μετά την κρούση θα είναι $υ_2 = υ_1 = 3\frac{m}{s}$.

Το σώμα $Σ_1$ θα ξεκινήσει ταλάντωση γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας του, άρα η ταχύτητα $υ_2 = 3\frac{m}{s}$ που αποκτά, αποτελεί την μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης. $υ_2 = υ_{max} = ωA = 3\frac{m}{s}$ (1)

Για την περίοδο της ταλάντωσης ισχύει:

$$T = 2π\sqrt{\frac{m}{k}} = 2π\sqrt{\frac{1kg}{900N/m}} \Rightarrow T = \frac{2π}{30}s \Rightarrow T = \frac{π}{15}s$$

και $ω = \frac{2π}{T} = \frac{2π}{π/15} rad/s \Rightarrow ω = 30\, rad/s$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε: $A = 0{,}1m$

β)Το σώμα $Σ_2$ μετά την κρούση θα αποκτήσει μηδενική ταχύτητα και θα ξεκινήσει ελεύθερη πτώση. Έτσι, η θέση του σε σχέση με το σημείο σύγκρουσης κάθε στιγμή θα βρίσκεται από τη σχέση $y = \frac{1}{2}gt^2$ (2), θεωρώντας τη θετική φορά προς τα κάτω.

Το σώμα $Σ_1$ ελαχιστοποιεί την κινητική του ενέργεια για $1^η$ φορά όταν βρεθεί στην πάνω ακραία θέση. Επειδή ξεκινά από τη θέση ισορροπίας, μέχρι να πάει στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης απαιτείται χρονικό διάστημα $t = \frac{T}{4} = \frac{\frac{π}{15}}{4}s \Rightarrow t = \frac{π}{60}s$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (\frac{\pi}{60} s)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{72} m$$

γ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ των εξής δύο θέσεων: της θέσης ισορροπίας και του υψηλότερου σημείου της τροχιάς του σώματος

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F\varepsilon\lambda} + W_w \Rightarrow 0 - \frac{m\upsilon_2^{\ 2}}{2} = W_{F\varepsilon\lambda} - mgA \Rightarrow W_{F\varepsilon\lambda} = -\frac{m\upsilon_2^{\ 2}}{2} + mgA \Rightarrow$$

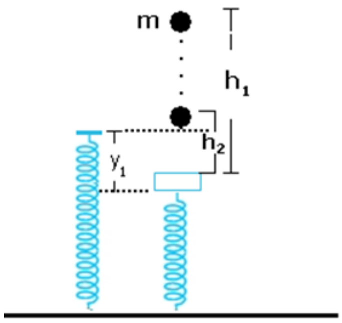
$$W_{F\varepsilon\lambda} = -\frac{1kg \cdot (3m/s)^2}{2} + 1kg \cdot (10m/s^2) \cdot 0,1m \Rightarrow W_{F\varepsilon\lambda} = -3,5J$$

δ) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος στη θέση αυτή. Επειδή το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση αυτή θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

$$\alpha = \alpha_{max} = \omega^2 A = (30rad/s)^2 \cdot 0,1m \Rightarrow \alpha = \alpha_{max} = 90\frac{m}{s^2}$$

Πρόβλημα 3.

Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 80\pi^2 \frac{N}{m}$ είναι συνδεδεμένος δίσκος μάζας $M = 5kg$ που ισορροπεί. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε δάπεδο Από ύψος $h_1 = 5m$ πάνω από το δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερα μια σφαίρα μάζας $m = 1kg$, η οποία συγκρούεται μετωπικά με τον δίσκο και η διάρκεια κρούσης είναι αμελητέα. Μετά την κρούση η σφαίρα αναπηδά κατακόρυφα και φτάνει σε ύψος $h_2 = 1,25m$ πάνω από την θέση ισορροπίας του δίσκου. Να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της ταχύτητας του δίσκου και της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.

β) την % μείωση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας λόγω της κρούσης.

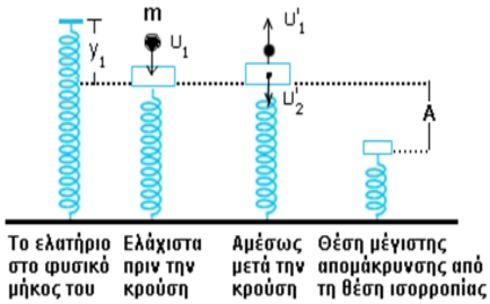
γ) τη θέση του δίσκου τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο ύψος h_2.

δ) τη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο δίσκο σε σχέση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες.

ε) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, αμέσως μετά την κρούση.

Δίνονται: $g = 10\frac{m}{s^2}$ και $\pi^2 = 10$.

Λύση



α) Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση και η μηχανική της ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και της θέσης ελάχιστα πριν την κρούση με το δίσκο.

$$E_{\text{μηχ, πριν την κρούση}} = E_{\text{μηχ, θέση ελευθέρωσης}}$$

Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας του σώματος λόγω βαρυτικού πεδίου, εκείνο στο οποίο βρίσκεται ο δίσκος πριν την κρούση.

$$\frac{mυ_1^2}{2} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow υ_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 5m} \Rightarrow υ_1 = 10\frac{m}{s}$$

Μετά την κρούση της σφαίρας με το δίσκο αυτή κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με το βάρος να είναι η μόνη δύναμη που της ασκείται, άρα η μηχανική της ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελάχιστα μετά την κρούση και της υψηλότερης θέσης που φτάνει.

Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής ενέργειας του σώματος στο βαρυτικό πεδίο, εκείνο στο οποίο βρίσκεται ο δίσκος πριν την κρούση.

$$\frac{mυ'^2_1}{2} = mgh_2 \Rightarrow υ'_1 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 1,25m} \Rightarrow υ'_1 = 5\frac{m}{s}$$

Γράφουμε τη διατήρηση της ορμής του συστήματος δίσκου - σώματος μεταξύ των θέσεων ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση.

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow mυ_1 = Mυ'_2 - mυ'_1 \Rightarrow υ'_2 = \frac{mυ'_1 + mυ_1}{M} = \frac{1kg \cdot 5m/s + 1kg \cdot 10m/s}{5kg} \Rightarrow υ'_2 = 3\frac{m}{s}$$

β) $$a\% = \left|\frac{ΔK}{K_{\text{πριν}}}\right| \cdot 100\% = \frac{K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} \cdot 100\% = (1 - \frac{υ'^2_1}{υ_1^2}) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$a\% = (1 - \frac{(5m/s)^2}{(10m/s)^2}) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$a\% = 75\%$

γ) Η ταχύτητα της σφαίρας καθώς ανέρχεται περιγράφεται από τη σχέση:

$\upsilon_1'' = \upsilon_1' - gt$ (1)

Στο υψηλότερο σημείο έχουμε $\upsilon_1'' = 0$, οπότε η σχέση (1) δίνει:

$$0 = 5\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}t_{\alpha\nu} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = 0,5s$$

Υπολογίζουμε την περίοδο της ταλάντωσης του δίσκου:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5kg}{80\pi^2 N/m}} \Rightarrow T = 0,5s$$

Άρα τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο ύψος h_2, ο δίσκος έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και κατευθύνεται προς τα κάτω.

δ) Η δύναμη επαναφοράς ενός σώματος που ταλαντώνεται δεμένο στο άκρο ελατηρίου δίνεται από τη σχέση :

$F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -ky \quad \mu\varepsilon \quad -A \le y \le A$ (2)

Το πλάτος ταλάντωσης βρίσκεται με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση

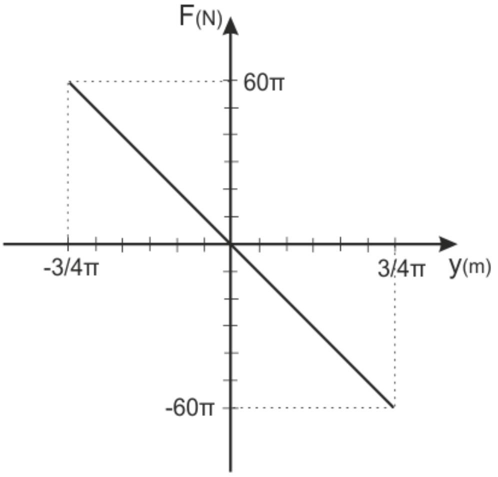
$$\frac{M\upsilon_2'^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow A = \upsilon_2'\sqrt{\frac{m}{k}} = 3\frac{m}{s}\cdot\sqrt{\frac{5kg}{80\pi^2 N/m}} \Rightarrow A = \frac{3}{4\pi}m$$

Άρα η σχέση (2) γίνεται: $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -80\pi^2 y \ (SI) \quad \mu\varepsilon \quad -\frac{3}{4\pi}m \le y \le \frac{3}{4\pi}m$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

Για $y = \frac{3}{4\pi}m$ παίρνουμε $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -60\pi N$

Για $y = -\frac{3}{4\pi}m$ παίρνουμε $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = 60\pi N$



ε) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου στη θέση αυτή θα είναι:

$$\frac{|\Delta U_{\varepsilon\lambda}|}{\Delta t} = \frac{|F_{\varepsilon\lambda}\Delta x|}{\Delta t} = |F_{\varepsilon\lambda}\upsilon| = ky_1\upsilon'_2 \qquad (3)$$

Το y_1 δηλώνει την επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Για τον υπολογισμό του γράφουμε τη συνθήκη ισορροπίας για το δίσκο.

$$\vec{W} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow Mg - ky_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{Mg}{k} = \frac{5kg \cdot 10m/s^2}{80\pi^2 N/m} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{16}m$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$\frac{|\Delta U_{\varepsilon\lambda}|}{\Delta t} = (80\pi^2 \frac{N}{m}) \cdot (\frac{1}{16}m) \cdot 3\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{\Delta U_{\varepsilon\lambda}}{\Delta t} = 150\frac{J}{s}$$

Πρόβλημα 4.

Ένα σώμα μάζας m_1 κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10\dfrac{m}{s}$ κεντρικά και ελαστικά με σώμα μάζας $m_2 = 3Kg$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 15\dfrac{m}{s}$ σε αντίθετη κατεύθυνση από το m_1. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα μάζας m_1 κινείται με αντίθετη φορά από την αρχική του και με ταχύτητα μέτρου $\upsilon'_1 = 5\dfrac{m}{s}$.

α) Να προσδιορίσετε τη μάζα m_1.

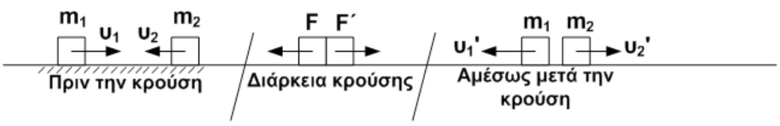
β) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρεθεί το % ποσοστό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 σε σχέση με την αρχική κινητική του ενέργεια, λόγω της κρούσης.

δ) Να υπολογισθεί πόσο θα απέχουν τα σώματα όταν σταματήσουν. Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του επιπέδου και κάθε σώματος είναι $\mu = 0,5$.

Δίνεται $g = 10\dfrac{m}{s^2}$.

Λύση



α) Έχουμε κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων που είναι και τα δύο σε κίνηση. Εφαρμόζουμε τους αντίστοιχους τύπους του σχολικού βιβλίου.

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (1)$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (2)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι αλγεβρικές, λαμβάνονται δηλαδή υπόψη τα πρόσημα των ταχυτήτων. Στην περίπτωσή μας έχουμε ορίσει θετική φορά προς τα δεξιά, δηλαδή τη φορά της ταχύτητας υ_1.

Με αριθμητική αντικατάσταση στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$\upsilon' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \Rightarrow -5 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}10 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(-15) \quad (SI) \Rightarrow$$

$$-5(m_1 + m_2) = 10m_1 - 40m_2 \Rightarrow$$

$$3m_1 = 7m_2 \Rightarrow m_1 = 7Kg$$

β) Με αριθμητική αντικατάσταση στην σχέση (2) παίρνουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2 \cdot 7}{10}10 + \frac{3-7}{10}(-15) \quad (SI) \Rightarrow \upsilon_2' = 20\frac{m}{s}$$

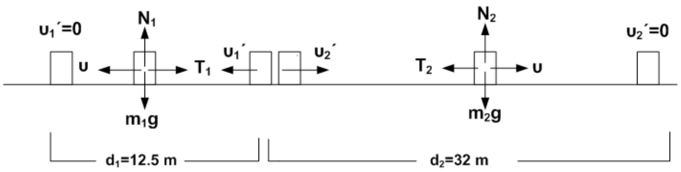
γ) $$a\% = \frac{\Delta K_1}{K_{1(\alpha\rho\chi)}}\% = \frac{K_{1(\tau\varepsilon\lambda)} - K_{1(\alpha\rho\chi)}}{K_{1(\alpha\rho\chi)}}\% = (\frac{K_{1(\tau\varepsilon\lambda)}}{K_{1(\alpha\rho\chi)}} - 1)\% \Rightarrow a\% = (\frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} - 1)\% \Rightarrow$$

$$a\% = (\frac{\upsilon_1'^2}{\upsilon_1^2} - 1)\% = (\frac{(5m/s)^2}{(10m/s)^2} - 1)\% \quad \Rightarrow \quad a\% = -75\%$$

Το (-) δηλώνει ότι η ενέργειά του μειώθηκε.

δ) Για τη δύναμη της τριβής που αναπτύσσεται στα δύο σώματα ισχύει:

$T_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g$ και $T_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g$.



Παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης η κινητική ενέργεια του σώματος ελαττώνεται μόνο λόγω του έργου της τριβής. Μέσω του έργου της τριβής αφαιρείται κινητική ενέργεια από τα σώματα και μετατρέπεται σε θερμική, μέχρις ότου όλη η κινητική ενέργεια γίνει θερμική και τα σώματα σταματήσουν.

Συνεπώς από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, έχουμε:

Για το σώμα μάζας m_1 το έργο της τριβής θα είναι ίσο με την κινητική ενέργεια:

$$T_1 \cdot d_1 = \frac{m_1 \upsilon_1'^2}{2} \Rightarrow \mu m_1 g d_1 = \frac{m_1 \upsilon_1'^2}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2\mu g} = \frac{(5m/s)^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10m/s^2} \Rightarrow d_1 = 2,5m$$

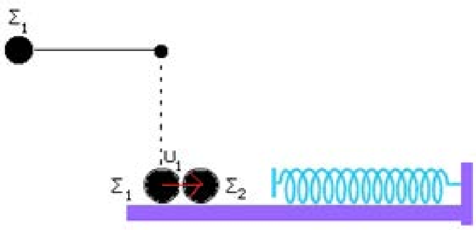
Ομοίως για το σώμα μάζας m_2 το έργο της τριβής θα είναι ίσο με την κινητική ενέργεια:

$$T_2 d_2 = \frac{m_2 \upsilon_2'^2}{2} \Rightarrow \mu m_2 g d_2 = \frac{m_1 \upsilon_2'^2}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{\upsilon_2'^2}{2\mu g} = \frac{(20m/s)^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10m/s^2} \Rightarrow d_2 = 40m$$

Άρα η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$d = d_1 + d_2 = 2,5m + 40m \Rightarrow d = 42,5m$$

Πρόβλημα 5.



Ένα σώμα Σ_1 με μάζα $m_1 = 1Kg$ είναι δεμένο με αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους $L = 1{,}8m$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά το νήμα είναι οριζόντιο. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ_1 να κινηθεί. Το σώμα Σ_1 μόλις το νήμα γίνει κατακόρυφο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = m_1$, που είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα Σ_2 μετά την κρούση συναντά και συγκρούεται με το ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\,N/m$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως στο σχήμα. Το σώμα Σ_2 συμπιέζει το ελατήριο και στη συνέχεια συναντά εκ νέου το σώμα Σ_1 και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά για δεύτερη φορά με αυτό. Να θεωρηθούν οι τριβές και η αντίσταση του αέρα αμελητέες.

α) Να βρείτε το μέτρο της τάσης του νήματος ελάχιστα πριν τη σύγκρουση του σώματος Σ_1 με το σώμα Σ_2.

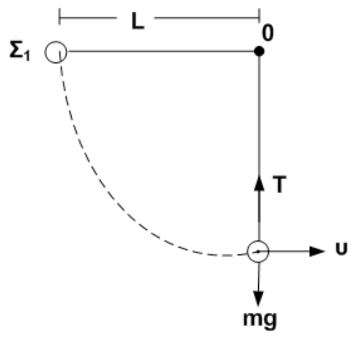
β) Να βρείτε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρείτε για πόσο χρόνο θα είναι σε επαφή το σώμα Σ_2 με το ελατήριο.

δ) Να βρείτε το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα Σ_1 που είναι δεμένο με το νήμα μετά τη δεύτερή του κρούση με το σώμα Σ_2.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10\dfrac{m}{s^2}$.

Λύση



α) Στην κατώτερη θέση η συνισταμένη του βάρους και της τάσης του νήματος θα ισούται με την κεντρομόλο δύναμη, η οποία θα έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο που βρίσκεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = \frac{m\upsilon^2}{L} \Rightarrow T - mg = \frac{m\upsilon^2}{L} \Rightarrow T = m(g + \frac{\upsilon^2}{L}) \quad (1)$$

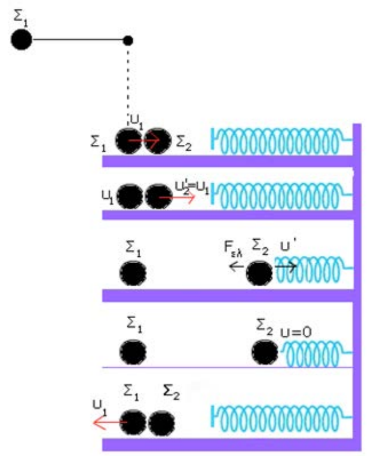
Το σώμα Σ_1 διαγράφει το τεταρτοκύκλιο. Η τάση του νήματος που ασκείται σε αυτό δεν παράγει έργο. Έργο παράγει μόνο το βάρος του, που είναι συντηρητική δύναμη. Τριβές ή αντιστάσεις δεν υπάρχουν. Έτσι εφαρμόζοντας τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας, για τις δύο θέσεις, οριζόντια και κατακόρυφη, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα υ του Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας του σώματος λόγω του βαρυτικού πεδίου, εκείνο στο οποίο βρίσκεται το σώμα βρίσκεται στην κατώτατη θέση.

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{2} = mgL \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gL} = \sqrt{2 \cdot 10m/s^2 \cdot 1{,}8m} \Rightarrow \upsilon = 6\frac{m}{s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$T = 1kg \cdot (10\frac{m}{s^2} + \frac{(6m/s)^2}{1{,}8m}) \Rightarrow T = 30N$$

β) Τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι ελαστική κεντρική, άρα τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Έτσι το σώμα Σ_1 μένει ακίνητο και το Σ_2 κινείται με την ταχύτητα του Σ_1, δηλαδή με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 6\frac{m}{s}$.



γ) Για όσο χρονικό διάστημα το σώμα Σ_2 είναι σε επαφή με το ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Όμως η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι εκεί που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, συνεπώς από τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο και μέχρι να επιστρέψει στη θέση αυτή (θέση ισορροπίας) θα έχει περάσει χρόνος ίσος με μισή περίοδο.

Η περίοδος ταλάντωσης του Σ_2, για όσο χρόνο είναι σε επαφή με το ελατήριο είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\text{kg}}{100\text{N/m}}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

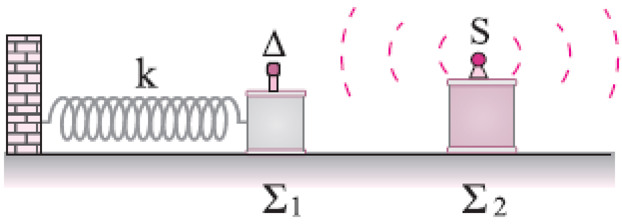
Άρα, το σώμα Σ_2 θα είναι σε επαφή με το ελατήριο για χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{10}\text{s}$

δ) Το σώμα Σ_2 εγκαταλείπει το ελατήριο με ταχύτητα μέτρου υ_1 και συναντά το σώμα Σ_1 ακίνητο στη θέση όπου το νήμα είναι κατακόρυφο. Στην κρούση που ακολουθεί τα σώματα θα ανταλλάξουν ταχύτητες, άρα η ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Σ_1 θα έχει μέτρο ίσο με αυτό που είχε πριν συγκρουστεί για πρώτη φορά. Συνεπώς, επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται, θα φτάσει ξανά στην αρχική θέση από όπου αφέθηκε ελεύθερο, δηλαδή στη θέση όπου το νήμα θα είναι οριζόντιο.

Πρόβλημα 6.

(Το πρόβλημα δόθηκε από τον εθελοντή κ. Παλόγο Αντώνιο)

Το ελατήριο του σχήματος έχει σταθερά $k = 400N/m$ και έχει στο ένα άκρο του στερεωμένο ένα σώμα, $Σ_1$, μάζας $m_1 = 1kg$ που φέρει ενσωματωμένο ένα δέκτη ήχου, Δ. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $0,4m$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή που το σώμα $Σ_1$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με ακίνητο σώμα $Σ_2$, μάζας $m_2 = 3kg$, το οποίο φέρει ενσωματωμένη πηγή ήχου συχνότητας $f_S = 688Hz$.



Να βρείτε:

α) την ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ ελάχιστα πριν τη σύγκρουση.

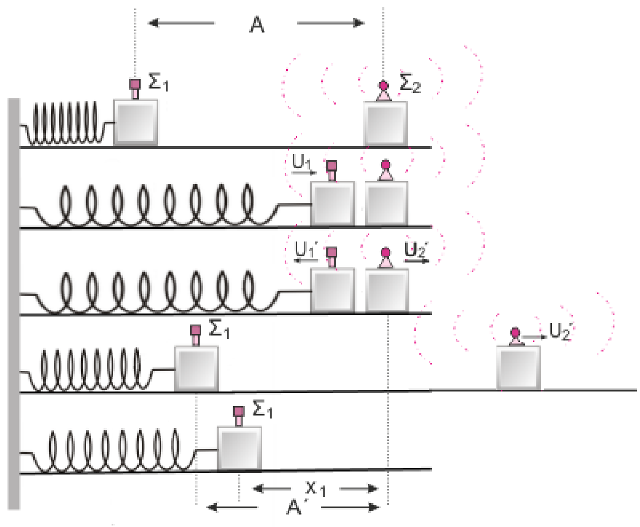
β) τις ταχύτητες των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ αμέσως μετά τη σύγκρουση καθώς και το πλάτος της νέας ταλάντωσης.

γ) τη συχνότητα που ανιχνεύει ο δέκτης όταν το σώμα $Σ_1$ διέρχεται για $1^η$ και για $2^η$ φορά μετά την κρούση από την απομάκρυνση $x_1 = -0,1\sqrt{3}\,m$. Να θεωρήσετε θετικό τον ημιάξονα προς τα δεξιά.

δ) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ τη στιγμή που ανιχνεύει συχνότητα $f_A = 680Hz$.

Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα, $υ_{ηχ} = 340m/s$.

Λύση



α) Το σώμα $Σ_1$ ελάχιστα πριν τη σύγκρουση κινείται με τη $υ_{max}$ της ταλάντωσης, επειδή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.

$$υ_{max} = υ_1 = ωA \Rightarrow υ_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{400N/m}{1kg}} \cdot 0,4m \Rightarrow υ_1 = 8m/s$$

β) Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική ελαστική, οπότε οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση θα είναι:

$$υ_1^{΄} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = \frac{1kg - 3kg}{1kg + 3kg} \cdot 8m/s \Rightarrow υ_1^{΄} = -4m/s$$

$$υ_2^{΄} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = \frac{2 \cdot 1kg}{1kg + 3kg} \cdot 8m/s \Rightarrow υ_2^{΄} = 4m/s$$

Άρα, μετά την κρούση η ηχητική πηγή απομακρύνεται με σταθερή ταχύτητα $υ_2^{΄} = 4m/s$ και το σώμα $Σ_1$ γυρνά πίσω ξεκινώντας νέα ταλάντωση με περίοδο ίδια με την αρχική και νέα μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης $υ_{max}^{΄} = 4m/s$. Άρα το νέο πλάτος ταλάντωσης είναι:

$$υ_{max}^{΄} = ωA^{΄} \Rightarrow A^{΄} = \frac{υ_{max}^{΄}}{ω} = \frac{υ_{max}^{΄}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow A^{΄} = \frac{4m/s}{\sqrt{\frac{400N/m}{1kg}}} \Rightarrow A^{΄} = 0,2m$$

γ) Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Σ_1 όταν αυτό διέρχεται από τη θέση $x_1 = -0{,}1\sqrt{3}\,\text{m}$.

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_{max} = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon'^2_{max} - \frac{k}{m_1}x_1^2} = \sqrt{(4\text{m/s})^2 - \frac{400\text{N/m}}{1\text{kg}}\cdot(-0{,}1\sqrt{3}\text{m})^2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \pm 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Την 1η φορά ο δέκτης κινείται προς τα αριστερά απομακρυνόμενος από την ηχητική πηγή, οπότε η συχνότητα που ανιχνεύεται θα είναι:

$$f_1 = f_s\frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_1}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s} = 688\text{Hz}\cdot\frac{340\frac{\text{m}}{\text{s}} - 2\frac{\text{m}}{\text{s}}}{340\frac{\text{m}}{\text{s}} + 4\frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow f_1 = 676\,\text{Hz}$$

Τη 2η φορά ο δέκτης κινείται προς τα δεξιά κατευθυνόμενος προς την ηχητική πηγή, που απομακρύνεται, οπότε η συχνότητα που ανιχνεύεται θα είναι:

$$f_1 = f_s\frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_1}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s} = 688\text{Hz}\cdot\frac{340\frac{\text{m}}{\text{s}} + 2\frac{\text{m}}{\text{s}}}{340\frac{\text{m}}{\text{s}} + 4\frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow f_1 = 684\,\text{Hz}$$

δ) $\dfrac{\Delta K}{\Delta t} = \dfrac{\Delta W_F}{\Delta t} = \dfrac{\Sigma F\cdot\Delta x}{\Delta t} = \Sigma F\cdot\upsilon \Rightarrow \dfrac{\Delta K}{\Delta t} = -kx\upsilon$ (1)

Πρέπει να υπολογιστούν τα x, υ.

Για τη συχνότητα f_A που ανιχνεύεται από το δέκτη ισχύει:

$$f_A = f_s\frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s} \Rightarrow 680 = 688\frac{340 + \upsilon_A}{340 + 4}\ (\text{SI}) \Rightarrow \upsilon_A = 0$$

Άρα, το σώμα Σ_1 βρίσκεται σε ακραία θέση, η ταχύτητα του είναι ίση με μηδέν, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = 0$$

Πρόβλημα 7.

Ένα κομμάτι ξύλου μάζας $m = 0,5Kg$ είναι ακλόνητα στερεωμένο στο κάτω άκρο ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου μάζας $M = 2Kg$. Το συνολικό μήκος ράβδου και κομματιού από ξύλο είναι $r = 1m$. Το πάνω άκρο της ράβδου είναι συνδεμένο σε ακλόνητο σημείο Ο με τέτοιο τρόπο ώστε η ράβδος να μπορεί να στρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο Ο, χωρίς τριβές. Το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε κατακόρυφη θέση. Ένα μικρό σώμα Σ, μάζας $m_1 = 0,5Kg$, που ολισθαίνει σε λείο τεταρτοκύκλιο ακτίνας $r = 1m$, φτάνοντας στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα υ_0, προσπίπτει και σφηνώνεται στο ξύλο. Μετά την κρούση το σύστημα ράβδος - ξύλο - βλήμα εκτρέπεται ώστε η μέγιστη απόκλιση της ράβδου από την αρχική κατακόρυφη θέση της να είναι $\theta = 60^0$. Να υπολογίσετε:

α) τη ροπή αδράνειας του συστήματος σώμα - ξύλο – ράβδος.

β) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

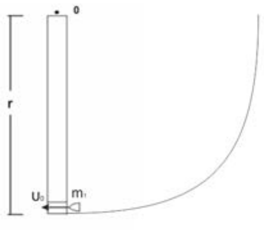
γ) το μέτρο της ταχύτητας υ_0 του βλήματος πριν την κρούση.

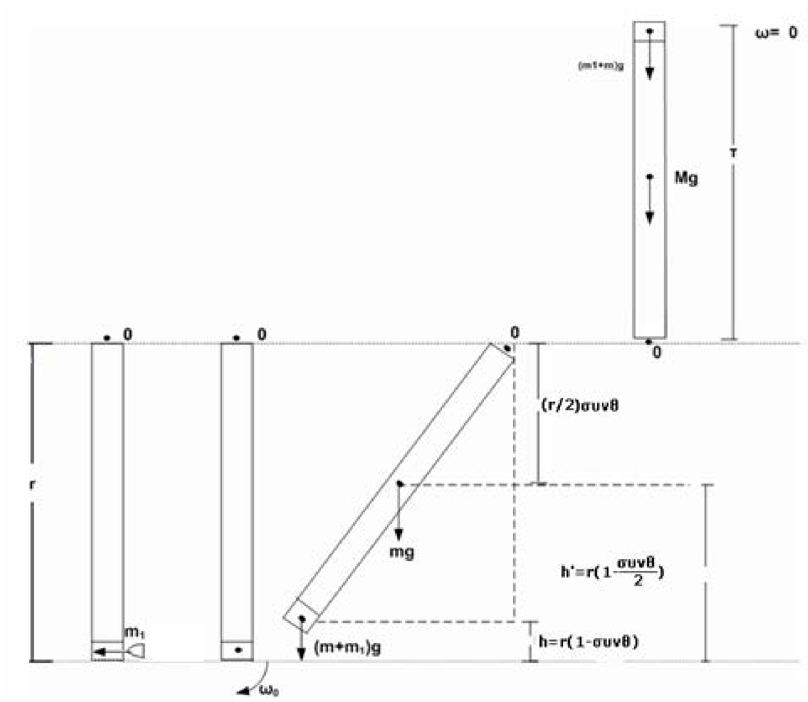
δ) Το ποσό της θερμότητας, που δημιουργήθηκε στη διάρκεια της κρούσης.

ε) το μέτρο της την ταχύτητας του βλήματος, ώστε το σύστημα βλήμα-ράβδος- ξύλο, να κάνει ανακύκλωση.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της $I = \frac{Mr^2}{12}$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\frac{m}{s^2}$, οι διαστάσεις του ξύλου και του βλήματος να θεωρηθούν αμελητέες, αντιστάσεις αέρα και τριβές αμελητέες.

<u>Λύση</u>





α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος σώμα - ξύλο – ράβδος ως προς τον άξονα περιστροφής Ο είναι ίση με: $I_{ολ(O)} = I_{ρ(O)} + I_{ξ(O)} + I_{σ(O)}$ (1)

Επειδή δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της, ενώ η ράβδος θα στραφεί ως προς το σημείο Ο, με το θεώρημα Steiner θα βρούμε τη ροπή αδράνειάς της ως προς το σημείο αυτό.

$$I_{ρ(O)} = \frac{Mr^2}{12} + M(\frac{r}{2})^2 = \frac{Mr^2}{3} \Rightarrow I_{ρ(O)} = \frac{2}{3}Kgm^2 \quad (2)$$

Η ροπή αδράνειας του σώματος $(I_σ)$ ως προς το Ο θα είναι:

$$I_{σ(O)} = m_1 r^2 = 0,5Kgm^2 \quad (3)$$

Η ροπή αδράνειας του ξύλου $(I_ξ)$ ως προς το Ο θα είναι:

$$I_{ξ(O)} = mr^2 = 0,5Kgm^2 \quad (4)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε την ολική ροπή αδράνειας του συστήματος $(I_{ολ})$ σώμα (m_1) - ξύλο – ράβδος, ως προς το Ο.

$$I_{ολ(O)} = (\frac{2}{3} + 0,5 + 0,5)kgm^2 \Rightarrow I_{ολ(O)} = \frac{5}{3}kgm^2 \quad (5)$$

β) Μετά την κρούση το σύστημα θα στραφεί γύρω από το σημείο Ο. Αφού δεν υπάρχουν τριβές η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Συνεπώς, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το κατώτερο σημείο της ράβδου, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, από τη στιγμή που ολοκληρώθηκε η κρούση μέχρις ότου η ράβδος σχηματίσει γωνία $\theta = 60^0$ με την κατακόρυφο:

$$\frac{Mgr}{2} + \frac{I_{ολ}\omega^2}{2} = (m + m_1)gh + Mgh' \quad (6)$$

όπου $h' = r[1 - (\frac{συνθ}{2})] = 0,75m$ (7)

και

$$h = r \cdot (1 - συνθ) = 0,5m \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας στην (6) τις (5), (7) και (8) βρίσκουμε $\omega = 2\sqrt{3}\ \frac{rad}{s}$.

γ) Το σώμα Σ ελάχιστα πριν την κρούση εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 1m$, άρα έχει στροφορμή ως προς τον άξονα O που βρίσκεται από τη σχέση:

$$L_{σωμ} = m_1\upsilon_0 r = 0,5\upsilon_0 \ (S.I.) \quad (9)$$

Επειδή στη διάρκεια της κρούσης του σώματος με το ξύλο, οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους είναι εσωτερικές και όλες οι άλλες δυνάμεις έχουν ροπή μηδέν ως προς το O, η στροφορμή του συστήματος σώμα-ξύλο – ράβδος διατηρείται, οπότε από την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε:

$$L_{ολ(πριν)} = L_{ολ(μετά)} \Rightarrow L_{σωμ(πριν)} = L_{συστ(μετά)} \Rightarrow 0,5\upsilon_0 = I_{ολ(O)}\omega \Rightarrow 0,5\upsilon_0 = \frac{5}{3}\omega \ (SI) \quad (10)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (10) βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση του με το ξύλο.

$$0,5\upsilon_0 = \frac{5}{3}\omega \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{10}{3} \cdot 2\sqrt{3}m/s \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{20\sqrt{3}}{3}m/s$$

δ) $Q = \frac{m_1\upsilon_0{}^2}{2} - \frac{I_{ολ}\omega^2}{2} = \frac{0,5kg \cdot (\frac{20\sqrt{3}}{3}m/s)^2}{2} - \frac{\frac{5}{3}kgm^2(2\sqrt{3}rad/s)^2}{2} \Rightarrow$

$$Q = \frac{100}{3}J - 10J \Rightarrow Q = \frac{70}{3}J$$

ε) Έστω ότι το σώμα Σ έχει την κατάλληλη ταχύτητα υ_1 ώστε μετά την κρούση το σύστημα να έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1 ικανή ώστε να κάνει ανακύκλωση.

Για να κάνει ανακύκλωση θα πρέπει να φτάσει στο ψηλότερο σημείο με γωνιακή ταχύτητα ελάχιστα μεγαλύτερη από το μηδέν. Θα θεωρήσουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος στο ψηλότερο σημείο είναι μηδέν (αν είναι ακριβώς μηδέν θα ισορροπήσει στο σημείο αυτό).

Επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται για το σύστημα, γράφουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της κατώτερης και της υψηλότερης θέσης. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την κατώτερη θέση:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow U_{\tau\epsilon\lambda} + K_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{Mgr}{2} + \frac{I_{o\lambda}\omega_1^2}{2} = (m+m_1)g2r + \frac{Mg3r}{2}.$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα που πρέπει να έχει η ράβδος αμέσως μετά την κρούση, προκύπτει $\omega_1 = \sqrt{48}\,\frac{rad}{s}$.

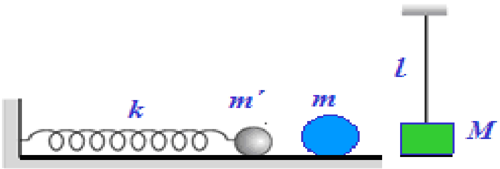
Με αντικατάσταση στη σχέση (7) βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση του με το ξύλο.

$$0,5\upsilon_1 = \frac{5}{3}\omega_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{10}{3}\cdot\sqrt{48}\,m/s \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{40\sqrt{3}}{3}\,m/s$$

Πρόβλημα 8.

(Το πρόβλημα δόθηκε από τον κ. Παπαδημητρίου Αθανάσιο)

Ένα σώμα μάζας $m = 3kg$, είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Λόγω εσωτερικής αιτίας το σώμα διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες m_1, m_2 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει $m_1 = 2m_2$.



Μετά τη διάσπαση το κομμάτι μάζας m_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας $m' = 2kg$, το οποίο είναι στερεωμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το δημιουργούμενο συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η ταχύτητα του μηδενίζεται κάθε $\frac{\pi}{10}s$.

Το κομμάτι μάζας m_2 συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας $M = 3kg$, το οποίο κρέμεται από νήμα μήκους $\ell = 2m$. Αμέσως μετά την κρούση η δύναμη που ασκεί το νήμα στο συσσωμάτωμα των μαζών m_2 και M είναι $F = 90\ N$.

Να βρεθούν:

α) Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος των μαζών m_2 και M αμέσως μετά την κρούση.

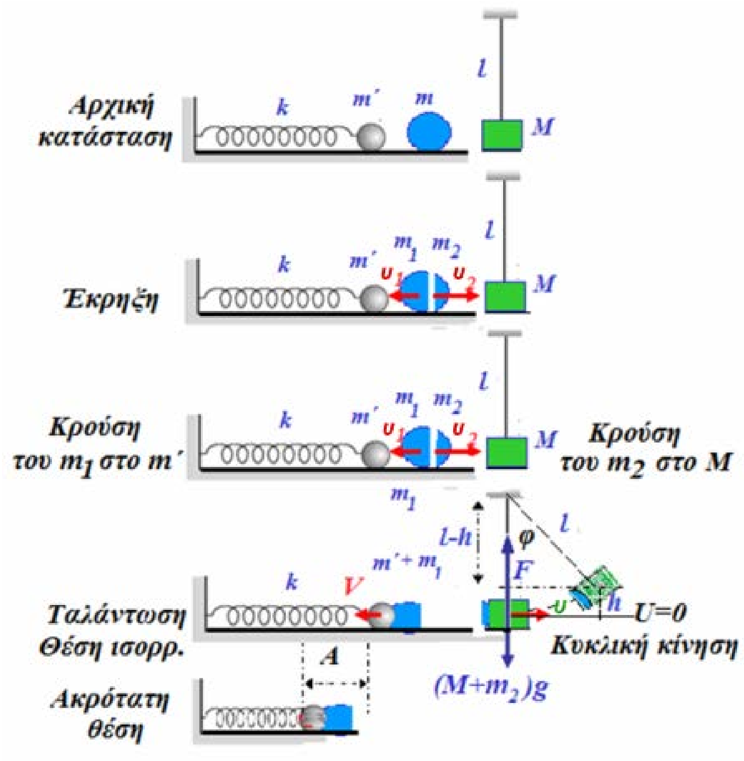
β) Το συνημίτονο της μέγιστης γωνίας εκτροπής του νήματος.

γ) Οι ταχύτητες των κομματιών με μάζες m_1 και M αμέσως μετά τη διάσπαση.

δ) Η συνάρτηση που περιγράφει πως μεταβάλλεται η δύναμη επαναφοράς του συσσωματώματος των μαζών m_1 και m' σε σχέση με το χρόνο. Να θεωρήσετε $t = 0$ τη στιγμή της κρούσης και θετική φορά του άξονα προς τα δεξιά. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

<u>Λύση</u>

Τα φαινόμενα που αναφέρονται στην εκφώνηση περιγράφονται στο ακόλουθο σχήμα.



α) Το συσσωμάτωμα μάζας $(M+m_2)$, αμέσως μετά την κρούση, αρχίζει να κινείται διαγράφοντας κυκλική τροχιά ακτίνας $R=\ell$.

Η συνισταμένη των δυνάμεων, που δρουν στο συσσωμάτωμα, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$F-(M+m_2)g=\frac{(M+m_2)\upsilon^2}{\ell}\Rightarrow \upsilon=\sqrt{\frac{[F-(M+m_2)g]\cdot\ell}{M+m_2}} \quad (1)$$

Επίσης $m_1+m_2=m \Rightarrow 2m_2+m_2=m \Rightarrow m_2=\frac{m}{3}=1\text{kg}$

και $m_1=2m_2=2\text{kg}$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{[90\text{N}-(3\text{kg}+1\text{kg})\cdot 10\text{m/s}^2]\cdot 2\text{m}}{3\text{kg}+1\text{kg}}}\Rightarrow \upsilon=5\text{m/s}$$

β) Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε για το συσσωμάτωμα, μεταξύ των θέσεων αμέσως μετά την κρούση και στη μέγιστη εκτροπή. Επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό της αρχικής θέσης.

$$E_{\mu\eta\chi.\alpha\rho\chi.} = E_{\mu\eta\chi.\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow 0 + \frac{1}{2}(M + m_2)\upsilon^2 = (M + m_2)\cdot gh + 0 \Rightarrow$$

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{(5m/s)^2}{2\cdot 10m/s^2} \Rightarrow h = 1,25m$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\ell - h}{\ell} = \frac{2m - 1,25m}{2m} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,375$$

γ) Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση του σώματος μάζας m_2 με το σώμα μάζας M.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow m_2\upsilon_2 = (M + m_2)\upsilon \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{(M + m_2)\upsilon}{m_2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \frac{(3kg + 1kg)\cdot 5m/s}{1kg} \Rightarrow \upsilon_2 = 20m/s$$

Στην έκρηξη δρουν εσωτερικές δυνάμεις, οπότε ισχύει η Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow 0 = -m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \Rightarrow 2m_2\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \Rightarrow$$

$$2\upsilon_1 = \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\upsilon_2}{2} \Rightarrow \upsilon_1 = 10m/s$$

δ) Η δύναμη επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\epsilon\pi\alpha\nu} = -k\cdot x \Rightarrow F_{\epsilon\pi\alpha\nu} = -k\cdot A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των k, A, ω και φ_0.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι π, δηλαδή $\varphi_0 = \pi$.

Η ταχύτητα σε μια ταλάντωση μηδενίζεται κάθε $\frac{T}{2}$, άρα:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{10}s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10}s \text{ και } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Από την $D = k = (m' + m_1)\cdot\omega^2$ βρίσκουμε τη σταθερά του ελατηρίου

$$D = k = (2kg + 2kg) \cdot (10\ rad/s)^2 \Rightarrow D = k = 400N/m$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση του σώματος μάζας m_1 με το σώμα μάζας m'.

$$\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετά} \Rightarrow -m_1 υ_1 = -(m' + m_1)V' \Rightarrow V' = \frac{m_1 υ_1}{m' + m_1} \Rightarrow$$

$$V' = \frac{2kg \cdot 10m/s}{2kg + 2kg} \Rightarrow V' = 5m/s$$

Ακριβώς μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μάζας $(m' + m_1)$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του οπότε ισχύει: $V' = V_{max}$.

Αλλά: $V' = V_{max} = ω \cdot A \Rightarrow A = \frac{V'}{ω} = \frac{5m/s}{10rad/s} \Rightarrow A = 0,5m$.

Με αντικατάσταση των τιμών των k, A, $ω$ και $φ_0$ στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$F_{επαν} = -400 \cdot 0,5 \cdot ημ(10t + π)\ (SI) \Rightarrow F_{επαν} = 200ημ(10t)\ (SI)$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 20/02/2012