ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 1, 2, 3)

ΘΕΜΑ Α

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδα 217.

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής Κατεύθυνσης», σελίδα 141.

3. **1)** Λ, **2)** Σ,

3) Λ, (π.χ ενώ τα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχουν, το όριο του αθροίσματος υπάρχει.)

4) Σ, (Αν θέσουμε $h(x)=f(x)+g(x)$, τότε $g(x)=h(x)-f(x)$ και αφού τα όρια των h και f υπάρχουν, θα υπάρχει και της διαφοράς τους).

5) Λ, **το σωστό είναι**

$$f'(x)=\left(x^{x}\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^{x}(\ln x+1)\ ,\quad x>0$$

ΘΕΜΑ Β

1. Επειδή το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους, έχουμε:

$$MB=|z-2i|,\quad MA=|z+1| \text{ και } |w|=\left|\frac{z-2i}{z+1}\right|=\frac{|z-2i|}{|z+1|}=\frac{MB}{MA}$$

2. $$w=1+2i\Leftrightarrow\frac{z-2i}{z+1}=1+2i\Leftrightarrow z-2i=z+1+2iz+2i\Leftrightarrow z=\frac{1+4i}{-2i}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{(1+4i)i}{-2i\cdot i}\Leftrightarrow z=\frac{i-4}{2}\Leftrightarrow\boxed{z=-2+\frac{1}{2}i}$$

3. Επειδή οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο Α(-1,0) και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{5}}{2}$, ισχύει $|z+1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Από τη σχέση $w = \frac{z-2i}{z+1}$ προκύπτει:

$$w = \frac{z-2i}{z+1} \Leftrightarrow wz + w = z - 2i \Leftrightarrow wz - z = -w - 2i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z(w-1) = -(w+2i) \Leftrightarrow z = \frac{w+2i}{1-w} \quad (w \neq 1)^*$$

Άρα

$$|z+1| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{w+2i}{1-w} + 1\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{w+2i+1-w}{1-w}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1+2i}{1-w}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{|1-w|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |1-w| = 2 \Leftrightarrow |w-1| = 2$$

Άρα οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε κύκλο κέντρου Κ (1,0) και ακτίνα R= 2.

* Είναι $w \neq 1$, διότι αν θέσουμε στη δοθείσα σχέση $w = \frac{z-2i}{z+1}$, όπου $w = 1$, μετά τις πράξεις προκύπτει 1=-2i (άτοπον).

ΘΕΜΑ Γ

1. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{(1+\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha^2 \ln(x+e) + 2\alpha + (\beta^2 + \frac{1}{2})e^x\right) = \alpha^2 + 2\alpha + \beta^2 + \frac{1}{2}$

Πρέπει:

$$\frac{-1}{2} = \alpha^2 + 2\alpha + \beta^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + \beta^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 + \beta^2 = 0$$

άρα $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

2. Για $\alpha = -1$ και $\beta = 0$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & , \quad -1 \le x < 0 \\ \ln(x+e) - 2 + \dfrac{1}{2}e^x & , \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

α) $$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}+1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1-\sqrt{x+1}+x}{x(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)-\sqrt{x+1}}{x(x+1)} =^{*} \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1+\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = +\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{x+1} = 0$ και $\sqrt{x+1} > 0$

* Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$. Έχουμε $f(0)=-\frac{1}{2}<0$ και $f(2)=\ln(2+e)+\frac{1}{2}e^2-2>0$, αφού $e>2\Rightarrow e^2>2^2\Rightarrow\frac{1}{2}e^2>2\Rightarrow\frac{1}{2}e^2-2>0$ και $\ln(2+e)>0$. Επιπλέον η f είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $0,\ 2$.

γ) Έχουμε $\left|xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|xf(x)|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|xf(x)|$.

Επομένως $-|xf(x)|\le xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\le|xf(x)|$.

Όμως

$\lim\limits_{x\to0}|xf(x)|=\lim\limits_{x\to0}\ -|xf(x)|\ =0$. Άρα από το κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x\to0}\left(xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

1. α) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}\cdot x=f'(0)\cdot0=0$,

διότι $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=\lim\limits_{u\to0}\frac{f(u)-f(0)}{u}=f'(0)$ (θέτουμε όπου $u=x^2$, οπότε όταν $x\to0$ και $u\to0$).

β) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f^2(2x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-1\ \ f(2x)+1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)\ \ f(2x)+1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ f(2x)-f(0)\ \ f(2x)+1}{2x}=$

$= 2f'(0)\ f(0)+1\ = 2f'(0)\ 1+1\ = 4f'(0)$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x} = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(k)-f(0)}{k} = f'(0)$, (θέτουμε $2x = k$, οπότε όταν $x \to 0$ και $k \to 0$).

2. Ισχύει:

$f^2(x)-4f(x) = x^2-3 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4 = x^2-3+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4 = x^2+1 \Leftrightarrow\ f(x)-2\ ^2 = x^2+1$ **(I)**

Επειδή $x^2+1>0$, έχουμε και $f(x)-2 \neq 0$ και επομένως η συνάρτηση $g(x) = f(x)-2$ διατηρεί το πρόσημό της, αφού είναι συνεχής και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή επιπλέον έχουμε και $f(0)=1$, είναι $g(0) = f(0)-2 = 1-2 = -1 < 0$ και επομένως $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $g(x) = -\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)-2 = -\sqrt{x^2+1}$.

Άρα $f(x) = 2-\sqrt{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$.

3. α) Έστω $x_0, f(x_0)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση εφαπτομένης θα είναι

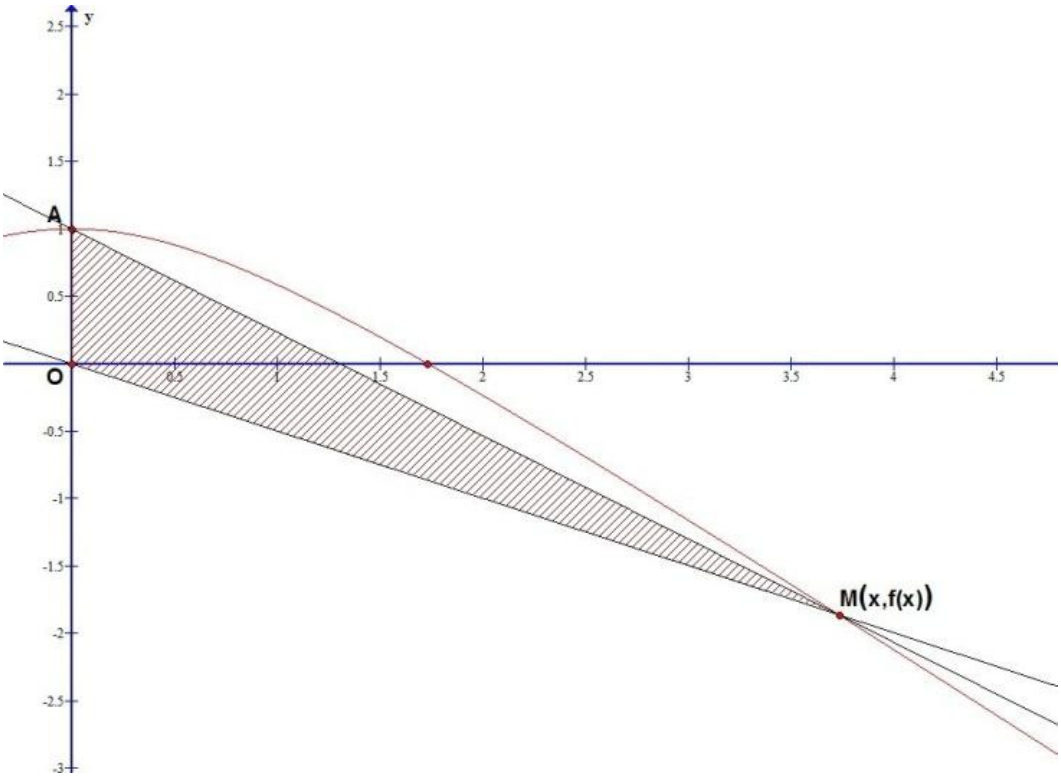
$y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-\ 2-\sqrt{x_0{}^2+1}\ = \dfrac{-x_0}{\sqrt{x_0{}^2+1}}(x-x_0)$ **(II)** και επειδή διέρχεται από το σημείο $B\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ θα επαληθεύεται από αυτό. Δηλαδή θα ισχύει

$\dfrac{3}{2}-\ 2-\sqrt{x_0{}^2+1}\ = \dfrac{-x_0}{\sqrt{x_0{}^2+1}}(0-x_0) \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2}+\sqrt{x_0{}^2+1} = \dfrac{x_0{}^2}{\sqrt{x_0{}^2+1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{2}\sqrt{x_0{}^2+1}+x_0{}^2+1 = x_0{}^2 \Leftrightarrow \sqrt{x_0{}^2+1} = 2 \Leftrightarrow x_0{}^2+1 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{3}$

- Για $x_0 = \sqrt{3}$ προκύπτει από τη **(II)** η εξίσωση $y = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}$

- Για $x_0 = -\sqrt{3}$ προκύπτει από τη **(II)** η εξίσωση $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}$

β) Έστω $M(x, f(x))$ σημείο της C_f με $x > 0$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ ισούται με $E_{(OAM)} = \frac{1}{2}(OA)\cdot d(M, y'y) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x$ και επειδή η τετμημένη μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου έχουμε $E(t) = \frac{1}{2}x(t)$. Άρα $E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)$ και επειδή $x'(t) = 2cm/sec$, προκύπτει ότι το εμβαδόν μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(t) = 1cm^2/sec$.