ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 10

2. Πότε μία συνάρτηση $f:A\to R$ **,** λέγεται συνάρτηση 1 – 1 (ένα προς ένα) ;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό** (Σ), αν είναι σωστή, ή με **Λάθος** (Λ), αν είναι λανθασμένη:

α) Ο αριθμός $z=(5-7i)^{2012}-(5+7i)^{2012}$ είναι φανταστικός αριθμός.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα κοντά στο x_0.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f\ \ x\right|=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f\ \ x$ = 0.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [3, 5], παραγωγίσιμη στο (3, 5)

με f(5)< f(3), τότε υπάρχει $\xi\in(3,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)<0$.

ε) Αν $\int_1^2 f(x)dx\geq 0$, τότε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ και $z_2 = 1 + z_1$.

1. Να αποδείξτε ότι:

α) $1 + z_1 + z_1^2 = 0$

Μονάδες 5

β) $z_1^3 = 1$

Μονάδες 6

γ) $z_2^{2\nu+1} = -z_1^{\nu+2}$ και $z_2^{2\nu} = z_1^{\nu}$ $\nu \in N^*$

Μονάδες 6

2. Αν $z_2^{36} = \alpha + \beta i$ και $z_2^{19} = \gamma + \delta i$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πραγματικοί αριθμοί, να βρείτε τους α, β, γ και δ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Για μια συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών, ισχύει $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 0$.

1. Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$

Μονάδες 2

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$ για κάθε $x \in R$.

Μονάδες 4

3. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο R.

Μονάδες 3

4. Να αποδείξετε ότι : $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 10

5. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to R$ συνεχής , η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) = \int_1^x \frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}\, dt \quad \text{για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

1. Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, $x \in (0,+\infty)$.

Μονάδες 4

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + x$, $x \in R$ είναι 1-1.

Μονάδες 3

3. Να βρείτε τον τύπο της f.

Μονάδες 5

4. Αν $f(x) = \ln x$, $x > 0$

α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x = e$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x) = \frac{x}{\ln x} - \int_e^x \frac{1}{\ln t}\, dt$ και να αποδείξετε ότι $\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln t}\, dt > \frac{e^2}{2} - e$.

Μονάδες 8