ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 1)

ΘΕΜΑ Α

1. Αν $F(x)=cf(x)$, τότε έχουμε

$$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\big(f(x+h)-f(x)\big)$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{c\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}=c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$ άρα $\big(cf(x)\big)'=cf'(x)$

2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0\in A$, όταν $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0.

3. **1)** Λάθος το σωστό είναι ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$),

2) Λάθος (για να ισχύει πρέπει οι συναρτήσεις f και g να έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς),

3) Σωστό,

4) Σωστό,

5) Σωστό (Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_0=1$ άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$),

ΘΕΜΑ Β

1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f'(x)=(x^3+\lambda^2x^2+\lambda x-2)'=3x^2+2\lambda^2x+\lambda$.

Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0=-1$ είναι παράλληλη στο άξονα $x'x$, θα ισχύει

$f'(-1)=0\Leftrightarrow 3-2\lambda^2+\lambda=0\Leftrightarrow 2\lambda^2-\lambda-3=0\Leftrightarrow \lambda=-1$ ή $\lambda=\dfrac{3}{2}$ και επειδή $\lambda<0$, τότε δεκτή είναι η τιμή $\lambda=-1$.

2. Για $\lambda=-1$ είναι $f(x)=x^3+x^2-x-2$ με $x\in\mathbb{R}$

α) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)+4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x^2-x-2+4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-x+1)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=\dfrac{(-2)^2-(-2)+1}{(-2)-2}=-\dfrac{7}{4}$

β) Έστω $y=\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha=f'(2)$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f'(x)=(x^3+x^2-x-2)'=3x^2+2x-1$, οπότε $\alpha=f'(2)=3\cdot 2^2+2\cdot 2-1=15$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης παίρνει τη μορφή: $y=15x+\beta$

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $M(2,f(2))$, δηλαδή από το $M(2,8)$,

ισχύει η σχέση $8=15\cdot 2+\beta$, οπότε $\beta=-22$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι: $y=15x-22$.

ΘΕΜΑ Γ

1. Πρέπει $e^{x-2012}+e^{2012-x}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Το οποίο ισχύει, διότι $e^{x-2012}>0$ και $e^{2012-x}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=\mathbb{R}$.

2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f'(x)=\left[\ln\left(e^{x-2012}+e^{2012-x}\right)\right]'=\frac{1}{e^{x-2012}+e^{2012-x}}\left(e^{x-2012}+e^{2012-x}\right)'=\frac{e^{x-2012}-e^{2012-x}}{e^{x-2012}+e^{2012-x}}$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{e^{x-2012}-e^{2012-x}}{e^{x-2012}+e^{2012-x}}=0\Leftrightarrow e^{x-2012}-e^{2012-x}=0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow e^{x-2012}=e^{2012-x}\overset{e^x:1-1}{\Leftrightarrow}x-2012=2012-x\Leftrightarrow 2x=4024\Leftrightarrow x=2012$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{x-2012} - e^{2012-x}}{e^{x-2012} + e^{2012-x}} > 0 \Leftrightarrow e^{x-2012} - e^{2012-x} > 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow e^{x-2012} > e^{2012-x} \overset{e^x:\ \text{γν. αύξ}}{\Leftrightarrow} x - 2012 > 2012 - x \Leftrightarrow 2x > 4024 \Leftrightarrow x > 2012$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x < 2012$

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	2012	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Ελάχιστο
$f(2012) = \ln 2$

Άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2012]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2012, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2012$ το $f(2012) = \ln 2$.

3. Αφού η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2012$ το $f(2012) = \ln 2$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει: $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow \ln(e^{x-2012} + e^{2012-x}) \geq \ln 2 \overset{\ln x:\ \text{γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^{x-2012} + e^{2012-x} \geq 2$

4. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι όλο το $\mathbb{R}$ και επειδή και η g είναι παραγωγίσιμη σαν άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f(x)$ και x τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$g'(x) = \left(f(x) + x\right)' = f'(x) + 1 = \frac{e^{x-2012} - e^{2012-x}}{e^{x-2012} + e^{2012-x}} + 1 =$$

$$\frac{e^{x-2012} - e^{2012-x} + e^{x-2012} + e^{2012-x}}{e^{x-2012} + e^{2012-x}} = \frac{2e^{x-2012}}{e^{x-2012} + e^{2012-x}} > 0\,.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα

ΘΕΜΑ Δ

1. Η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης ενός κινητού άρα έχουμε $s'(t) = 3t^2 + 6t - 9$ άρα $s'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 9 = 15 \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{sec}}$.

2. Επειδή η ταχύτητα είναι $36\frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{sec}}$, θα έχουμε
$s'(t)=36 \Leftrightarrow 3t^2+6t-9=36 \Leftrightarrow 3t^2+6t-45=0 \Leftrightarrow 3(t^2+2t-15)=0 \Leftrightarrow t=3$ ή $t=-5$ (απορρίπτεται), άρα τη χρονική στιγμή $t=3$ sec το κινητό έχει ταχύτητα $36\frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{sec}}$.

3. Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, άρα

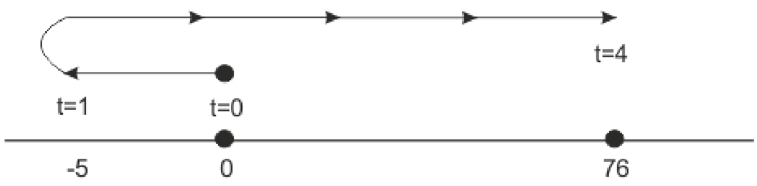
$s''(t)=6t+6 \Rightarrow s''(3)=24\ \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{sec}^2}$.

4. Το κινητό κινείται , στη θετική κατεύθυνση όταν $v(t)=s'(t)>0$, δηλαδή όταν

$t^2+2t-3>0 \Leftrightarrow (t<-3$ ή $t>1)$ και επειδή $t\in[0,8]$ τότε $1<t\leq 8$

Το κινητό κινείται, στην αρνητική κατεύθυνση όταν
$v(t)=s'(t)<0 \Leftrightarrow t^2+2t-3<0 \Leftrightarrow -3<t<1$ και επειδή $t\in[0,8]$ τότε $0\leq t<1$

Σχηματικά η κίνηση του κινητού μπορεί να παρασταθεί ως εξής



5. Η απόσταση που διανύθηκε στη διάρκεια του 1 sec είναι $S_1=|s(1)-s(0)|=|-5-0|=5$ και η απόσταση που διανύθηκε από το 1 sec έως το 4 sec

$S_2=|s(4)-s(1)|=|76-(-5)|=81$

Άρα το ολικό διάστημα είναι $S_1+S_2=5+81=86$.