ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Ερώτηση θεωρίας 1

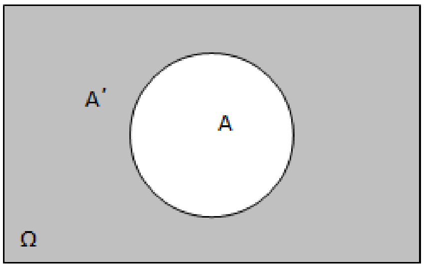
α) Τι λέγεται δειγματικός χώρος και τι ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης;

β) Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ να αποδείξετε ότι: $P\left(A'\right)=1-P\left(A\right)$.

Λύση

α) Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. Ενδεχόμενο λέγεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης.

β) Επειδή $A\cap A'=\varnothing$, δηλαδή τα Α και Α΄ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:



$$P\left(A\cup A'\right)=P(A)+P\left(A'\right)\Rightarrow P(\Omega)=P(A)+P\left(A'\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=P(A)+P\left(A'\right)\Leftrightarrow P\left(A'\right)=1-P(A).$$

Ερώτηση θεωρίας 2

α) Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν $A \subseteq B$ να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$.

β) Ποιο ενδεχόμενο λέγεται αντίθετο του ενδεχομένου Α;

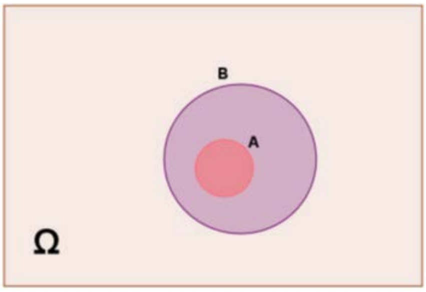
<u>Λύση</u>

α)
Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά

$$N(A) \leq N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \leq P(B).$$



β) Το ενδεχόμενο A που διαβάζεται «όχι Α ή συμπληρωματικό του Α ή αντίθετο του Α» και πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.

Ερώτηση θεωρίας 3

α) Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.
Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

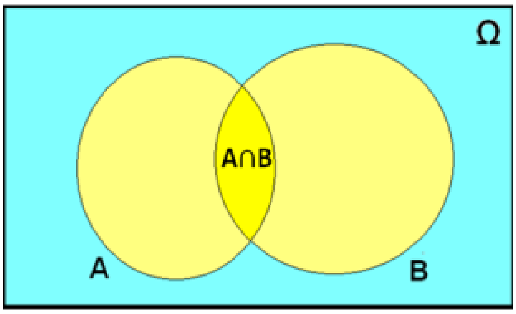
β) Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ξένα μεταξύ τους;

Λύση

α)
Για τα ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) \quad \textbf{(1)}$$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου $A \cup B$ υπολογίζεται δύο φορές. Είναι $N(\Omega) \neq 0$, οπότε από την (1) έχουμε:



$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

β) Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ξένα μεταξύ τους όταν η τομή τους είναι το κενό σύνολο, $A \cap B = \varnothing$.

Ερώτηση θεωρίας 4

1. Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

2. α) Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α κάποιου δειγματικού χώρου Ω.

   β) Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων.
   i. $P(\Omega)$
   ii. $P(\varnothing)$

3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Λύση

1. Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

2. α) Ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \varepsilon\upsilon\nu o\ddot{\iota}\kappa\acute{\omega}\nu\ \pi\epsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu}{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omega}\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu} = \frac{N(\Omega)}{N(A)}$$

β) $P(\Omega) = 1$ και $P(\varnothing) = 0$ (Αφού $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$ και $P(\varnothing) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$)

3. Βέβαιο ενδεχόμενο λέγεται το ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται πάντοτε.(Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης είναι ένα τέτοιο ενδεχόμενο αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω).

Αδύνατο ενδεχόμενο λέγεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης.(Το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι αδύνατο ενδεχόμενο).

Ερώτηση θεωρίας 5

α) Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

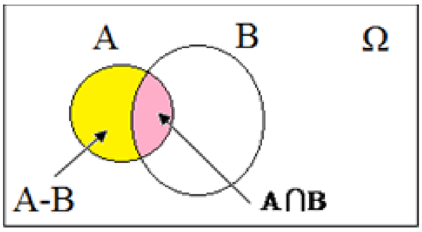
$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

β) Να δώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

<u>Λύση</u>

α) Είναι: $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$ **(1)** και

$(A-B)\cup(A\cap B)=A$ **(2)**



Τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα **(1)**, οπότε σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P\big((A-B)\cup(A\cap B)\big)=P(A-B)+P(A\cap B)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

β) Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0\le P(\omega_i)\le 1$
- $P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_\nu)=1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$. Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}\neq\varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing)=0$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Σ' ένα σχολείο το 80% των μαθητών έχουν κινητό τηλέφωνο και το 40% έχει φορητό υπολογιστή. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν Κ είναι το ενδεχόμενο: «ο μαθητής έχει κινητό τηλέφωνο» και Υ το ενδεχόμενο: «ο μαθητής έχει φορητό υπολογιστή», τότε:

α) Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Κ και Υ δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) Να δείξετε ότι $\frac{2}{5} \le P\left(K - Y\right) \le \frac{4}{5}$.

γ) Αν επιπλέον η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής έχει μόνο φορητό υπολογιστή» είναι 15%, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

i. «ο μαθητής έχει μόνο κινητό τηλέφωνο ή μόνο φορητό υπολογιστή»

ii. «ο μαθητής δεν έχει κινητό τηλέφωνο ούτε φορητό υπολογιστή».

<u>Λύση</u>

α) Έστω ότι τα ενδεχόμενα Κ και Υ είναι ασυμβίβαστα. Τότε έχουμε $K \cap Y = \varnothing$ και από τον απλό προσθετικό νόμο $P\left(K \cup Y\right) = P(K) + P(Y) = 80\% + 40\% = 120\% > 1$ (αδύνατο).
Άρα τα ενδεχόμενα Κ και Υ δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι $P\left(K - Y\right) \le \frac{4}{5}$ (1) και $P\left(K - Y\right) \ge \frac{2}{5}$ **(2)**.

Είναι $K - Y \subseteq K$, άρα $P\left(K - Y\right) \le P(K) = 80\% = \frac{4}{5}$.

Έστω ότι ισχύει η **(2)** δηλαδή, $P\left(K - Y\right) \ge \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(K) - P\left(K \cap Y\right) \ge \frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(K \cap Y\right) \le P(K) - \frac{2}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = 40\% = P(Y)$, που ισχύει διότι $K \cap Y \subseteq Y$.

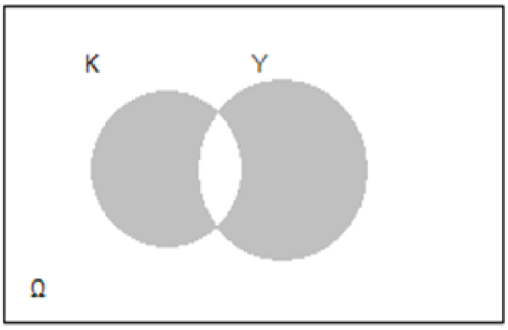
Από τις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι $\frac{2}{5} \le P\left(K - Y\right) \le \frac{4}{5}$.

γ) Η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής έχει μόνο φορητό υπολογιστή» είναι 15%, άρα

$P\left(Y - K\right) = 15\% \Leftrightarrow P(Y) - P\left(K \cap Y\right) = 15\% \Leftrightarrow$

$P\left(K \cap Y\right) = P(Y) - 15\% = 40\% - 15\% = 25\%$.

i. Το ενδεχόμενο «ο μαθητής έχει μόνο κινητό τηλέφωνο ή μόνο φορητό υπολογιστή» είναι το $(K-Y)\cup(Y-K)$. Από το διπλανό διάγραμμα παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα $(K-Y)$ και $(Y-K)$ είναι ασυμβίβαστα. Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:



$$P\left[(K-Y)\cup(Y-K)\right]=P(K-Y)+P(Y-K)=$$

$$=P(K)-P(K\cap Y)+P(Y)-P(K\cap Y)=$$

$$=P(K)+P(Y)-2P(K\cap Y)=$$

$$=80\%+40\%-2\cdot 25\%=70\%$$

ii. Το ενδεχόμενο «ο μαθητής δεν έχει κινητό τηλέφωνο ούτε φορητό υπολογιστή» είναι το $(K\cup Y)'$.

Άρα έχουμε

$$P(K\cup Y)'=1-P(K\cup Y)=1-P(K)-P(Y)+P(K\cap Y)=$$

$$1-80\%-40\%+25\%=5\%\ .$$

Άσκηση 2

Σε μια έρευνα που έγινε σε μια πόλη ως προς τον τρόπο που ενημερώνονται οι κάτοικοι για τις ειδήσεις προέκυψε ότι το 20% δεν ενημερώνεται από την τηλεόραση, το 70% δεν ενημερώνεται από το διαδίκτυο και το 10% δεν ενημερώνεται ούτε από την τηλεόραση ούτε από το διαδίκτυο.

α) Αν επιλέξουμε έναν κάτοικο τυχαία, να βρείτε την πιθανότητα να ενημερώνεται και από την τηλεόραση και από το διαδίκτυο.

β) Αν επιλέξουμε έναν κάτοικο τυχαία, να βρείτε την πιθανότητα να ενημερώνεται από το διαδίκτυο και όχι από την τηλεόραση.

γ) Αν επιλέξουμε έναν κάτοικο τυχαία, να βρείτε την πιθανότητα να ενημερώνεται από την τηλεόραση και όχι από το διαδίκτυο.

<u>Λύση</u>

Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόλης. Θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: ο κάτοικος να ενημερώνεται από την τηλεόραση

Β: ο κάτοικος να ενημερώνεται από το διαδίκτυο.

Από τα δεδομένα που έχουμε συμπεραίνουμε ότι:

$$P(A')=0,2 \Leftrightarrow P(A)=1-P(A')=0,8$$

$$P(B')=0,7 \Leftrightarrow P(B)=1-P(B')=0,3$$

και

$$P\left((A\cup B)'\right)=0,1 \Leftrightarrow P(A\cup B)=1-P\left((A\cup B)'\right)=0,9$$

α) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cap B$. Εφαρμόζοντας τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,8+0,3-0,9=0,2\ .$$

β) Έχουμε το ενδεχόμενο $B-A$, οπότε

$$P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=P(B)-P(A\cap B)=0,3-0,2=0,1\ .$$

γ) Έχουμε το ενδεχόμενο $A-B$, οπότε

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,8-0,2=0,6\ .$$

Άσκηση 3

Από το σύνολο {2, 3} επιλέγουμε τυχαία ψηφία και σχηματίζουμε ένα τριψήφιο αριθμό. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

α) ένα τουλάχιστον ψηφίο του αριθμού να είναι 2

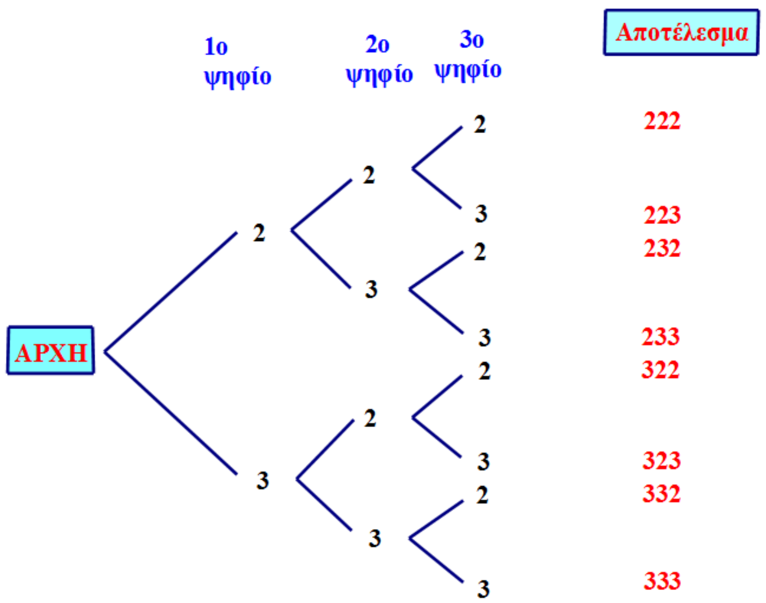
β) ακριβώς δύο ψηφία του αριθμού να είναι 2

γ) ένα μόνο ψηφίο του αριθμού να είναι 3

και να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα.

<u>Λύση</u>

Για να υπολογίσουμε το δειγματικό χώρο του πειράματος κατασκευάζουμε δεντροδιάγραμμα



Με βάσει το δεντροδιάγραμμα ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι
$\Omega = \{222, 223, 232, 233, 322, 323, 332, 333\}$

Άρα $N(\Omega) = 8$

α) Έστω Α το ενδεχόμενο «ένα τουλάχιστον ψηφίο του αριθμού να είναι 2», τότε
$A = \{222, 223, 232, 233, 322, 323, 332\}$, άρα $N(A) = 7$ οπότε $P(A) = \frac{7}{8}$

β) Έστω Β το ενδεχόμενο «ακριβώς δύο ψηφία του αριθμού να είναι 2», τότε
$B = \{223, 232, 322\}$, άρα $N(B) = 3$ οπότε $P(B) = \frac{3}{8}$

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο «ένα μόνο ψηφίο του αριθμού να είναι 3», τότε

$\Gamma = \{223, 232, 322\}$ άρα $N(\Gamma) = 3$ οπότε $P(\Gamma) = \frac{3}{8}$

$A \cap \Gamma = \{223, 232, 322\}$

Αφού η τομή των ενδεχομένων Α και Γ δεν είναι το κενό σύνολο, τα ενδεχόμενα Α και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda}{3}x^3+\frac{3\lambda}{2}x^2+(\lambda+5)x+2012$, $x\in\mathbb{R}$ και λ είναι ένας φυσικός αριθμός που καθορίζεται από τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων.

$A=\{\lambda\in\Omega:$ Η εξίσωση $f'(x)=0$ να έχει 2 ρίζες άνισες$\}$

$B=\{\lambda\in\Omega:$ Η εξίσωση $f'(x)=0$ να έχει 2 ρίζες ισες$\}$

$\Gamma=\{\lambda\in\Omega:$ Η εξίσωση $f'(x)=0$ να είναι αδύνατη$\}$

<u>Λύση</u>

Είναι $f'(x)=\lambda x^2+3\lambda x+\lambda+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
Οι ρίζες της $f'(x)=0\Leftrightarrow\lambda x^2+3\lambda x+\lambda+5=0$ καθορίζονται από τη διακρίνουσα Δ αφού είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

Έχουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(3\lambda)^2-4\lambda(\lambda+5)=9\lambda^2-4\lambda^2-20\lambda=$

$5\lambda^2-20\lambda=5\lambda(\lambda-4)$.

- Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 5\lambda(\lambda-4)>0\Leftrightarrow\lambda<0$ ή $\lambda>4$, τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει 2 ρίζες άνισες και επειδή $\lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ τότε $A=\{5,6\}$ οπότε $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

- Αν $\Delta=0\Leftrightarrow 5\lambda(\lambda-4)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=4$, τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει 2 ρίζες ίσες και επειδή $\lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ τότε $B=\{4\}$ οπότε $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{6}$.

- Αν $\Delta<0\Leftrightarrow 5\lambda(\lambda-4)<0\Leftrightarrow 0<\lambda<4$, τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη

και επειδή $\lambda\in\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ τότε $\Gamma=\{1,2,3\}$ οπότε $P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Άσκηση 5

Ένα Γενικό Λύκειο έχει 250 αγόρια και κορίτσια. Το 75% των αγοριών και τα $\frac{4}{5}$ των κοριτσιών συμμετείχαν στην μονοήμερη εκδρομή του Σχολείου τους. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άτομο. Αν η πιθανότητα να είναι αγόρι και να μη συμμετείχε στην μονοήμερη εκδρομή του Σχολείου του είναι 12%, να βρείτε:

α) Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει το Λύκειο.

β) Την πιθανότητα να είναι κορίτσι και να μη συμμετείχε στη μονοήμερη εκδρομή του Σχολείου.

<u>Λύση</u>

α) Έστω x ο αριθμός των αγοριών και y ο αριθμός των κοριτσιών. Με βάση τα δεδομένα έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

	Συμμετοχή στη μονοήμερη εκδρομή	
	ΝΑΙ	**ΟΧΙ**
Αγόρια	$\frac{75}{100}\cdot x$	$\frac{25}{100}\cdot x$
Κορίτσια	$\frac{4}{5}\cdot y$	$\frac{1}{5}\cdot y$

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος έχει 250 στοιχεία, άρα $N(\Omega)=250$. Επομένως $x+y=250$.
Αφού επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας.

Θεωρούμε το ενδεχόμενο:

Α: «να είναι αγόρι και να μη συμμετείχε στη μονοήμερη εκδρομή του Σχολείου»

Είναι:

$$P(A)=12\% \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{12}{100} \Leftrightarrow \frac{\frac{25}{100}\cdot x}{250}=\frac{12}{100} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{12}{100}\cdot\frac{100}{25}\cdot 250 \Leftrightarrow x=120$$

Είναι:

$$y=250-x=250-120=130$$

Άρα τα αγόρια του Λυκείου είναι 120 και τα κορίτσια του Λυκείου είναι 130.

β) Θεωρούμε το ενδεχόμενο:

Β: «να είναι κορίτσι και να μη συμμετείχε στην μονοήμερη εκδρομή του Λυκείου»

Είναι:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{\frac{1}{5}\cdot 130}{250}=\frac{13}{125}=0{,}104 \text{ ή } 10{,}4\%$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\ln x+1, x>0$ και τα ενδεχόμενα A, B του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, για τα οποία ισχύει $A,B\neq\varnothing, A\cap B\neq\varnothing$ και $A\not\subseteq B$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι $\ln\dfrac{P(A)}{P\left(A\cap B\right)}>P\left(A-B\right)$.

γ) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M\left(P\left(A\right),\dfrac{5P\left(B\right)}{2}+\ln 2\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=-x$, να βρεθεί η διάμεσος των παρατηρήσεων:

$P\left(A\right),P\left(B\right),P\left(A\cup B\right),P\left(A\cap B\right)$.

Λύση

α) Η παράγωγος της f είναι: $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$, $x>0$.

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		+∞
f′(x)		-	0	+	
f(x)		↘	ο.ε.	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,+\infty\right)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,1\right]$.

- Έχει ελάχιστο το $f\left(1\right)=1-\ln 1+1=2$.

β) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A)$.

Επιπλέον $A \not\subseteq B$, άρα $P(A \cap B) < P(A)$. Για τους αριθμούς $P(A \cap B), P(A)$ ισχύει ότι $0 < P(A \cap B) < P(A) \le 1$.

Αφού η f είναι φθίνουσα στο $(0,1]$, προκύπτει ότι

$$f\left(P(A \cap B)\right) > f\left(P(A)\right) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) - \ln\left(P(A \cap B)\right) + 1 > P(A) - \ln\left(P(A)\right) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(P(A)\right) - \ln\left(P(A \cap B)\right) > P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{P(A)}{P(A \cap B)} > P(A - B).$$

γ) Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M\left(P(A), \frac{5P(B)}{2} + \ln 2\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = -x$, ισχύει

$$f'\left(P(A)\right) = \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \frac{P(A) - 1}{P(A)} = -1 \Leftrightarrow$$

$$P(A) - 1 = -P(A) \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}.$$

Το σημείο $M\left(P(A), \frac{5P(B)}{2} + \ln 2\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, άρα

$$f\left(P(A)\right) = \frac{5P(B)}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5P(B)}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} + 1 = \frac{5P(B)}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow 1 + 2\ln 2 + 2 = 5P(B) + 2\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{3}{5}.$$

Επειδή ισχύει $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ και $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ προκύπτει $P(A \cap B) \le P(A) \le P(A \cup B)$ και $P(A \cap B) \le P(B) \le P(A \cup B)$.

Επίσης είναι $P(A)=\frac{1}{2}<P(B)=\frac{3}{5}$.

Άρα οι παρατηρήσεις τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά ως εξής:

$P\left(A\cap B\right),P\left(A\right),P\left(B\right),P\left(A\cup B\right)$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $\nu=4$ (άριος), άρα η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των μεσαίων παρατηρήσεων που είναι σε κάθε περίπτωση $\delta=\frac{P\left(A\right)+P\left(B\right)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}}{2}=\frac{11}{20}$.

Άσκηση 2

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, \kappa, \lambda\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, όπου $\kappa = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^2 - 9}$ και λ η μέγιστη τιμή που παίρνει η μέση τιμή των αριθμών $-3x^2 + 18x$, $-9x + 6$, $3x - 3$ όταν το x διατρέχει το $\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ .

β. Αν $P(1) = P(2) = P(3) = \dfrac{P(\kappa)}{4} = \dfrac{P(\lambda)}{3}$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(1), P(2), P(3), P(\kappa)$ και $P(\lambda)$.

γ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\mu \in \Omega \,/\, x^2 + \mu \cdot x + 4 \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}\}$.

Λύση

α. $\kappa = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2(x+1) - 9(x+1)}{x^2 - 9} =$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x+1)(x^2 - 9)}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3}(x+1) = 4$.

Η μέση τιμή των αριθμών $-3x^2 + 18x$, $-9x + 6$, $3x - 3$ είναι

$$\overline{x} = \frac{(-3x^2 + 18x) + (-9x + 6) + (3x - 3)}{3} =$$

$$\frac{-3x^2 + 12x + 3}{3} = -x^2 + 4x + 1 .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Παραγωγίζουμε και έχουμε:

$$f'(x) = (-x^2 + 4x + 1)' = -2x + 4 .$$

Ισχύει

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 4 < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Άρα το μέγιστο της συνάρτησης είναι το $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = 5$. Επομένως $\lambda = 5$.

β. Ισχύει:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 \Leftrightarrow$$

$$P(1) + P(1) + P(1) + 4 \cdot P(1) + 3 \cdot P(1) = 1 \Leftrightarrow 10 \cdot P(1) = 1 \Leftrightarrow P(1) = \frac{1}{10},$$

Οπότε

$$P(2) = P(3) = \frac{1}{10}$$

$$P(4) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$ και

$$P(5) = \frac{3}{10}.$$

γ. Αφού $x^2 + \mu \cdot x + 4 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μικρότερη του μηδενός, δηλαδή $\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma = \mu^2 - 16 < 0$. Η τελευταία ισχύει όταν $\mu = 1$ ή $\mu = 2$ ή $\mu = 3$.

Άρα $A = \{1, 2, 3\}$,

οπότε

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{3}{10}.$$

Άσκηση 3

Ένα κουτί περιέχει Άσπρες(Α) Μαύρες (Μ) και Κόκκινες (Κ) μπάλες. Αν γνωρίζετε ότι η πιθανότητα να επιλεγεί μια άσπρη μπάλα είναι $P(A)=\frac{1}{3}$, η πιθανότητα να επιλεγεί μια μαύρη μπάλα είναι $P(M)=\frac{1}{4}$ και ότι οι κόκκινες μπάλες είναι 20 να βρείτε πόσες μαύρες και πόσες άσπρες μπάλες περιέχει το κουτί.

<u>Λύση</u>

Έστω Α, Μ, Κ τα ενδεχόμενα να επιλέξουμε Άσπρη, Μαύρη, Κόκκινη μπάλα αντίστοιχα. Αν οι άσπρες μπάλες είναι x και οι μαύρες μπάλες είναι y τότε $N(A)=x$ και $N(M)=y$.

Επιπλέον έχουμε $N(K)=20$.

Οπότε $N(\Omega)=x+y+20$

Για τα ενδεχόμενα Κ, Μ, Α έχουμε:

$$P(A)+P(M)+P(K)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{N(K)}{N(\Omega)}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{20}{x+y+20}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{20}{x+y+20}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{20}{x+y+20}=\frac{5}{12} \Leftrightarrow$$

$$x+y+20=48 \Leftrightarrow x+y=28$$

Δηλαδή οι μαύρες και οι άσπρες μπάλες είναι συνολικά 28.

Επομένως όλες οι μπάλες που περιέχει το κουτί, δηλαδή και οι άσπρες και οι μαύρες και οι κόκκινες μπάλες είναι συνολικά 28+20=48

Αλλά $P(A)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{48}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow N(A)=16$

Επομένως οι άσπρες μπάλες είναι 16, οπότε οι μαύρες μπάλες είναι 28-16 = 12

Άσκηση 4

Α. Να δείξετε ότι για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν:

α) $\left[P(A)\right]^{2012} \le P(A)$.

β) $\left[P(A)\right]^{2012} + \left[P(A')\right]^{2012} \le 1$.

Β. Αν για το ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $0 < P(A) < 1$ τότε $\dfrac{1}{P(A')} + \dfrac{9}{P(A)} \ge 16$.

<u>Λύση</u>

Α. α) Έχουμε $0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le [P(A)]^{2011} \le 1 \Leftrightarrow [P(A)]^{2012} \le P(A)$.

β) Από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}[P(A)]^{2012} \le P(A) \\ [P(A')]^{2012} \le P(A')\end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} [P(A)]^{2012} + [P(A')]^{2012} \le P(A) + P(A') \Leftrightarrow$$

$$[P(A)]^{2012} + [P(A')]^{2012} \le 1.$$

Β. Είναι $0 < P(A) < 1$ και $0 < P(A') < 1$.

$$\frac{1}{P(A')} + \frac{9}{P(A)} \ge 16 \Leftrightarrow$$

$$P(A)P(A')\frac{1}{P(A')} + P(A)P(A')\frac{9}{P(A)} \ge 16P(A)P(A') \Leftrightarrow$$

$$P(A) + 9P(A') \ge 16P(A)P(A') \Leftrightarrow$$

$$P(A) + 9[1 - P(A)] \ge 16P(A)[1 - P(A)] \Leftrightarrow$$

$$P(A) + 9 - 9P(A) \ge 16P(A) - 16[P(A)]^2 \Leftrightarrow$$

$$16[P(A)]^2 - 24P(A) + 9 \ge 0 \Leftrightarrow [4P(A) - 3]^2 \ge 0$$

που ισχύει.

Άσκηση 5

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και δύο ενδεχόμενά του $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Αν είναι $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $B - A = A'$
β) Να βρείτε την πιθανότητα $P(B - A)$
γ) Να αποδείξετε ότι $P(A \cup B) = 1$
δ) Να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) = 0$
ε) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

<u>Λύση</u>

α)

- Το ενδεχόμενο $B - A$ αποτελείται από τα στοιχεία του Β που δεν ανήκουν στο Α, οπότε έχουμε:

$$B - A = \{\omega_4, \omega_5\}$$

- Το ενδεχόμενο A' αποτελείται από τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α, οπότε έχουμε:

$$A' = \{\omega_4, \omega_5\}$$

Άρα:

$$B - A = A' \quad \textbf{(1)}$$

β) Από τη σχέση **(1)** έχουμε:

$$P(B - A) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

γ) Είναι:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **(2)**

- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ **(3)**

Από τις σχέσεις **(2)** και **(3)** έχουμε:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$ **(4)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(4)** έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A) + 1 - P(A) \Leftrightarrow$$

$P(A \cup B) = 1$

2ος τρόπος: $A \cup B = \left\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\right\} = \Omega \Rightarrow P\left(A \cup B\right) = P\left(\Omega\right) = 1$

δ) Είναι:

$$P(B - A) = \frac{3}{4} \text{ και } P(B) = \frac{3}{4}$$

Άρα από τη σχέση **(3)** έχουμε:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$$

ε) Είναι:

$$A \cap B = \left\{\omega_3\right\} \neq \varnothing$$

Άρα τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{\mu x}, 0<\mu<1$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τεταγμένη 1.

β) Δίνονται οι παρατηρήσεις $f(0), f'(0), f''(0), \mu^3$. Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in(0,1)$, ώστε για το εύρος R των παρατηρήσεων να ισχύει $R\leq\frac{7}{8}$.

γ) Αν $\mu=\frac{1}{2}$, θεωρούμε το δειγματικό χώρο $\Omega=\left\{\kappa, f'(0), f''(0), \frac{1}{8}\right\}$ ενός πειράματος τύχης και για τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων $\{\omega_i\}, i=1,2,3,4$ ισχύει $P(\omega_i)=\omega_i$, τότε:

i. να δείξετε ότι $\kappa=\frac{1}{8}$ και

ii. να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A=\{\ \alpha\in\Omega$ /"η εφαπτομένη του α) ερωτήματος διέρχεται από το σημείο $M\left(8\alpha^2-1, 3\alpha\right)$"}

Λύση

α) Έστω $A(x_0,1)$ το σημείο επαφής. Τότε ισχύει $f(x_0)=1\Leftrightarrow e^{\mu x_0}=1\Leftrightarrow \mu x_0=0$ που ισχύει για $x_0=0$, αφού $0<\mu<1$. Άρα το σημείο είναι το $A(0,1)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=e^{\mu x}\cdot(\mu x)'=\mu e^{\mu x}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda=f'(x_0)=f'(0)=\mu e^0=\mu$.

Άρα γίνεται $\varepsilon: y=\mu x+\beta$. Επίσης $A(0,1)\in\varepsilon\Leftrightarrow 1=\mu\cdot 0+\beta\Leftrightarrow\beta=1$.

Τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y=\mu x+1$.

β) Έχουμε $f(x)=e^{\mu x}, f'(x)=\mu e^{\mu x}$ και $f''(x)=\mu e^{\mu x}\cdot(\mu x)'=\mu^2 e^{\mu x}$.

Άρα οι παρατηρήσεις είναι: $f(0)=e^0=1, f'(0)=\mu e^0=\mu, f''(0)=\mu^2 e^0=\mu^2, \mu^3$. Για να υπολογίσουμε το εύρος R πρέπει να τις τοποθετήσουμε σε αύξουσα σειρά.

Συγκεκριμένα είναι $0<\mu<1\overset{\cdot\mu}{\Rightarrow}0<\mu^2<\mu<1\overset{\cdot\mu}{\Rightarrow}0<\mu^3<\mu^2<\mu<1$. Το εύρος είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση και ισούται με $R=1-\mu^3$.

Έτσι έχουμε $R \le \frac{7}{8} \Leftrightarrow 1-\mu^3 \le \frac{7}{8} \Leftrightarrow \mu^3 \ge \frac{1}{8}$, άρα $\mu \ge \frac{1}{2}$ **(1).** Όμως ξέρουμε ότι $0<\mu<1$ **(2).**

Από τη συναλήθευση των **(1)** και **(2)** έχουμε τελικά, $\frac{1}{2} \le \mu < 1$.

γ) Αν $\mu = \frac{1}{2}$, τότε $f'(0) = \frac{1}{2}$ και $f''(0) = \frac{1}{4}$. Έτσι ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \left\{\kappa, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$.

i. Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι μη ισοπίθανα, άρα ισχύει

$$P(\kappa) + P\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{1}{4}\right) + P\left(\frac{1}{8}\right) = 1 \Rightarrow \kappa + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 \Leftrightarrow \kappa = \frac{1}{8}.$$

ii. Επειδή $\mu = \frac{1}{2}$, η εφαπτομένη του α) ερωτήματος είναι $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x + 1$.

Το σημείο $M\left(8\alpha^2 - 1, 3\alpha\right) \in \varepsilon \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{8\alpha^2 - 1}{2} + 1 \Leftrightarrow 6\alpha = 8\alpha^2 - 1 + 2 \Leftrightarrow$

$8\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$.

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 36 - 32 = 4$ και ρίζες $\alpha = \frac{1}{2}$ ή $\alpha = \frac{1}{4}$.

Άρα το ενδεχόμενο Α είναι το $A = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$.

Από τον αξιωματικό ορισμό προκύπτει ότι $P(A) = P\left(\frac{1}{4}\right) + P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=8x^3-15x^2+9x, x\in\mathbb{R}$ και έστω A,B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν οι πιθανότητες $P(A\cap B)$ και $P(A)$ είναι οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντιες εφαπτομένες, τότε

α. Να βρείτε τις οριζόντιες εφαπτόμενες.

β. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

γ. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A\cap B)$ και $P(A)$.

δ. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\frac{1}{2}\le P(B)\le\frac{3}{4}.$$

<u>Λύση</u>

α. Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντιες εφαπτόμενες εκεί όπου η κλίση είναι μηδέν, άρα στα σημεία όπου η παράγωγος μηδενίζεται.

Έτσι $f'(x)=0\Leftrightarrow 24x^2-30x+9=0\Leftrightarrow (x=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{3}{4})$.

Επίσης $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$ και $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{16}$.

Στο σημείο $A\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$y=0\cdot x+\beta$ και το σημείο $A\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$ την επαληθεύει, άρα $\frac{7}{4}=0\cdot\frac{1}{2}+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{7}{4}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=\frac{7}{4}$.

Στο σημείο $B\left(\frac{3}{4},\frac{27}{16}\right)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=0\cdot x+\beta$ και το σημείο $B\left(\frac{3}{4},\frac{27}{16}\right)$ την επαληθεύει, άρα $\frac{27}{16}=0\cdot\frac{3}{4}+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{27}{16}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=\frac{27}{16}$.

β. Είναι $f'(x)=24x^2-30x+9$ και οι ρίζες της παραγώγου είναι $x=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{3}{4}$. Με τη βοήθεια του προσήμου του τριωνύμου σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		$1/2$		$3/4$		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ και $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$, οπότε παρουσιάζει στο $x=\frac{3}{4}$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{16}$ και στο $x=\frac{1}{2}$ τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$.

γ. Επειδή $A\cap B\subseteq A$ έπεται ότι $P(A\cap B)\le P(A)$, άρα από το πρώτο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$ και $P(A)=\frac{3}{4}$.

δ. Από τη συνεπαγωγή $A\cap B\subseteq B\Rightarrow P(A\cap B)\le P(B)$ έπεται ότι $P(B)\ge\frac{1}{2}$.

Επίσης $P(A\cup B)\le 1\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1\Leftrightarrow$

$P(B)\le 1-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(B)\le\frac{3}{4}$.

Άρα

$$\frac{1}{2}\le P(B)\le\frac{3}{4}.$$

Άσκηση 3

Μια κονσερβοποιία συσκεύασε μια ποσότητα κομπόστας σε ομοιόμορφα κουτιά. Από τον ποιοτικό έλεγχο που έκανε προέκυψε ότι:

- Η πιθανότητα ένα τυχαίο κουτί να βρεθεί κανονικό είναι 84%.
- Η πιθανότητα ένα τυχαίο κουτί να βρεθεί ελαττωματικό ως ελλιποβαρές είναι 3%.
- Η πιθανότητα ένα τυχαίο κουτί να βρεθεί ελαττωματικό ως υπέρβαρο είναι 5%.
- Η πιθανότητα ένα τυχαίο κουτί να βρεθεί ελαττωματικό λόγω κακής συσκευασίας είναι 10%.

Να βρεθεί η πιθανότητα κατά τον ποιοτικό έλεγχο το τυχαίο κουτί να βρεθεί

i. ελαττωματικό λόγω βάρους.
ii. ελαττωματικό.
iii. ελαττωματικό και λόγω βάρους και λόγω συσκευασίας.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:
Α: «το κουτί είναι κανονικό», τότε $P(A)=0,84$
Β: «το κουτί είναι ελαττωματικό ως ελλιποβαρές» τότε $P(B)=0,03$
Γ : «το κουτί είναι ελαττωματικό ως υπέρβαρο» τότε $P(\Gamma)=0,05$
Δ: «το κουτί είναι ελαττωματικό λόγω κακής συσκευασίας» τότε $P(\Delta)=0,1$

i. Η πιθανότητα το τυχαίο κουτί να είναι ελαττωματικό λόγω βάρους (επειδή είναι ελλιποβαρές ή υπέρβαρο) με τη βοήθεια των συνόλων εκφράζεται ως $P(B\cup\Gamma)$. Επειδή τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα με βάσει τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=0,03+0,05=0,08$$

ii. Η πιθανότητα το τυχαίο κουτί να βρεθεί ελαττωματικό λόγω βάρους ή λόγω κακής συσκευασίας με τη βοήθεια των συνόλων εκφράζεται ως $P((B\cup\Gamma)\cup\Delta)$. Η πιθανότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την πιθανότητα το τυχαίο κουτί να μην είναι κανονικό, οπότε έχουμε:

$$P((B\cup\Gamma)\cup\Delta)=P(A')=1-P(A)=1-0,84=0,16$$

iii. Η πιθανότητα το τυχαίο κουτί να βρεθεί ελαττωματικό και λόγω βάρους και λόγω κακής συσκευασίας με τη βοήθεια των συνόλων εκφράζεται ως $P((B\cup\Gamma)\cap\Delta)$ Επειδή τα ενδεχόμενα $B\cup\Gamma$ και Δ δεν είναι ασυμβίβαστα με βάση τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P((B\cup\Gamma)\cap\Delta)=P(B\cup\Gamma)+P(\Delta)-P((B\cup\Gamma)\cup\Delta)=$$
$$0,08+0,1-0,16=0,02$$

Άσκηση 4

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$ όπου η παράμετρος λ καθορίζεται από τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων.

$A = \{\lambda \in \Omega$: Το σύστημα έχει μοναδική λύση $\}$
$B = \{\lambda \in \Omega$: Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις $\}$
$\Gamma = \{\lambda \in \Omega$: Το σύστημα είναι αδύνατο $\}$
$\Delta = \{\lambda \in \Omega$: Το σύστημα έχει λύση το ζευγάρι (-1, -1) $\}$

<u>Λύση</u>

Έχουμε $\lambda \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y .

$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 2)$, $D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 1) + \lambda = 2 - \lambda$

$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2(\lambda - 1) = \lambda^2(2 - \lambda)$.

Βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου, για τις οποίες είναι $D = 0$.

Έχουμε $D = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση και επειδή το $\lambda \in \Omega$ τότε $A = \{1,3,4,5,6\}$ οπότε $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{5}{6}$.

- Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 2$, τότε για:

  - $\lambda = 2$ το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ άρα έχει άπειρο το πλήθος λύσεων και

    επειδή το $\lambda \in \Omega$ τότε $B = \{2\}$ οπότε $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$

  - $\lambda = 0$ το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 0x - y = -1 \\ 0x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ άρα είναι αδύνατο και επειδή το $\lambda \in \Omega$ τότε $\Gamma = \{\varnothing\}$ οπότε $P(\Gamma) = \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = 0$.

- Όταν το σύστημα έχει λύση το ζευγάρι $(x, y) = (-1, -1)$ τότε το $\lambda = 1$ και επειδή το $\lambda \in \Omega$ τότε $\Delta = \{1\}$ οπότε $P(\Delta) = \dfrac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

Άσκηση 5

Ένα κουτί περιέχει κ -κόκκινες και μ -μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα.

α) Αν η πιθανότητα να είναι η μπάλα κόκκινη είναι $\frac{2}{3}$, να βρείτε τη σχέση που συνδέει το κ και το μ .

β) Στη συνέχεια προσθέτουμε στο κουτί 6 α -άσπρες μπάλες και η πιθανότητα να επιλεγεί άσπρη μπάλα γίνεται $\frac{1}{2}$. Βρείτε τα κ και μ .

γ) Στη συνέχεια, επίσης βρείτε πόσες πράσινες μπάλες πρέπει να ρίξουμε στο κουτί, ώστε η πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία μία πράσινη μπάλα από αυτό να είναι μικρότερη από το $\frac{1}{4}$ και μεγαλύτερη από $\frac{1}{7}$.

<u>Λύση</u>

α) Στο κουτί αρχικά βρίσκονται $\kappa+\mu$ μπάλες.

Έχουμε $P(\kappa)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\kappa+\mu}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3\kappa=2\left(\kappa+\mu\right) \Leftrightarrow \kappa=2\mu$. **(1)**

β) Στο κουτί τώρα βρίσκονται $\kappa+\mu+6$ μπάλες.

Έχουμε $P(\alpha)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{\kappa+\mu+6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 12=\kappa+\mu+6 \Leftrightarrow \kappa+\mu=6$. **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των **(1)** και **(2)** βρίσκουμε $\kappa=4$ και $\mu=2$.

γ) Έστω x το ζητούμενο πλήθος από τις πράσινες μπάλες.

Άρα, μέσα στο κουτί υπάρχουν $12+x$ μπάλες.

Επομένως, η πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία μία πράσινη μπάλα από το κουτί είναι: $\frac{x}{12+x}$

Από την υπόθεση θα έχουμε: $\frac{1}{7}<\frac{x}{12+x}<\frac{1}{4}$ με $x>0$ και λύνουμε τη διπλή αυτή ανίσωση.

- $\frac{x}{12+x}>\frac{1}{7} \Leftrightarrow 7x>12+x \Leftrightarrow 6x>12 \Leftrightarrow x>2$ και
- $\frac{x}{12+x}<\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x<12+x \Leftrightarrow 3x<12 \Leftrightarrow x<4$

Επειδή όμως ο x είναι θετικός ακέραιος και $2<x<4$, τότε $x=3$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x-1$, $x\in\mathbb{R}$ και δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)<P(B)$. Αν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στα οποία η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη, τότε:

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

β) Αν η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β είναι $\frac{1}{4}$

i. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.
ii. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α.
iii. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(2x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x-1\right)'=8x^3+2x^2-5x+1$$

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα σημείο της με τετμημένη x_o αν και μόνο αν $f'(x_o)=0$, οπότε αρκεί να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$.

Είναι:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 8x^3+2x^2-5x+1=0$ **(1)**

8	2	-5	1	ρ = -1
	-8	6	-1	
8	-6	1	0	

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner η εξίσωση **(1)** ισοδύναμα γράφεται:

$(x+1)\cdot\left(8x^2-6x+1\right)=0\Leftrightarrow x+1=0$ ή $8x^2-6x+1=0$

- Η εξίσωση $x+1=0$ έχει ρίζα τον αριθμό -1
- Η εξίσωση $8x^2-6x+1=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-6)^2-4\cdot 8\cdot 1=4>0$, οπότε έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις $x=\frac{6\pm 2}{12}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ ή $x=\frac{1}{2}$

Άρα ρίζες της εξίσωση **(1)** είναι:

$$x=-1\,,\ x=\frac{1}{4}\ \text{και}\ x=\frac{1}{2}$$

Από τις παραπάνω ρίζες δεκτές είναι μόνο οι:

$$x=\frac{1}{4}\ \text{και}\ x=\frac{1}{2}$$

αφού το ο αριθμός –1 δεν μπορεί να είναι τιμή πιθανότητας.

Είναι $P(A)<P(B)$, οπότε έχουμε $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$

β)

i. Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β είναι το $A'\cap B'=\left(A\cup B\right)'$, οπότε έχουμε:

$$P\Big(\left(A\cup B\right)'\Big)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 1-P\left(A\cup B\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P\left(A\cup B\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P\left(A\cap B\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-P\left(A\cap B\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=0$$

Άρα τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

ii. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α είναι το $A-B$, οπότε έχουμε:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{4}$$

iii. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα Α και Β είναι το $(A\cap B)'$. Όμως τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα. Έχουμε λοιπόν $A\cap B=\varnothing$, επομένως $(A\cap B)'=\varnothing'=\Omega$, οπότε $P\big((A\cap B)'\big)=P(\Omega)=1$

Ημερομηνία τροποποίησης: 19/4/2012