ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 2)

ΘΕΜΑ Α

1. α) Απόλυτη συχνότητα v_i ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

β) Σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i ορίζουμε το πηλίκο της συχνότητας v_i με το μέγεθος ν του δείγματος, δηλαδή $f_i = \frac{\nu_i}{\nu},\ i = 1, 2, ..., \kappa$.

γ)

i. Αφού $0 \le \nu_i \le \nu \Leftrightarrow 0 \le \frac{\nu_i}{\nu} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le f_i \le 1$ για $i = 1, 2, ..., \kappa$.

ii. $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$.

2. α) Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i, εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

β) Ισχύει $\frac{f_1}{1} = \frac{f_2}{2} = \frac{f_3}{3} = \frac{f_4}{4} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{1}{10} = 0,1$

Οπότε $f_1 = 0,1$, $f_2 = 0,2$, $f_3 = 0,3$ και $f_4 = 0,4$

Επίσης $f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow 0,3 = \frac{15}{\nu} \Leftrightarrow \nu = 50$ και $\nu_1 = f_1 \cdot \nu = 0,1 \cdot 50 = 5$, $\nu_2 = f_2 \cdot \nu = 0,2 \cdot 50 = 10$ και $\nu_4 = f_4 \cdot \nu = 0,4 \cdot 50 = 20$.

- Αν c το πλάτος της κλάσης τότε το ανώτερο όριο της πρώτης κλάσης θα είναι $0 + c = c$. Το κατώτερο όριο της δεύτερης κλάσης θα είναι και αυτό c άρα το ανώτερο όριο της δεύτερης κλάσης θα είναι $2c$.

  Θα έχουμε $\frac{c + 2c}{2} = 6 \Leftrightarrow \frac{3c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4$

  Με όλα τα παραπάνω ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

κλάσεις	x_i	ν_i	f_i
$[0\ ,4)$	2	5	0,1
$[\,4\,,8\,)$	6	10	0,2
$[\,8\ ,\ 12)$	10	15	0,3
$[\ 12,16\,)$	14	20	0,4
ΣΥΝΟΛΟ		50	1

3. α) Λάθος,

β) Σωστό,

γ) Σωστό,

δ) Λάθος,

ε) Σωστό,

στ) Λάθος,

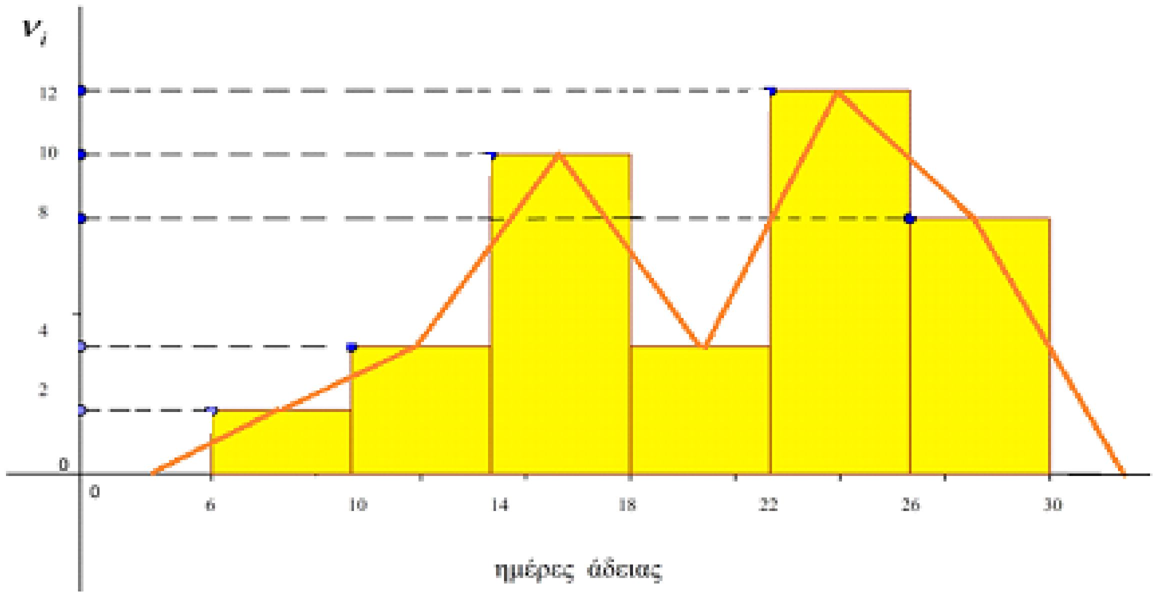
ζ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

α) Αφού το εύρος του δείγματος είναι $R = 29 - 6 = 23$ και το πλήθος $\nu = 40$, τότε οι κλάσεις είναι $\kappa = 6$.Το πλάτος των κλάσεων θα είναι $c = \dfrac{R}{\kappa} = \dfrac{23}{6} = 3{,}83 \approx 4$. Αν θεωρήσουμε ως αρχή της πρώτης κλάσης το 6, θα έχουμε τον επόμενο πίνακα.

…,…	x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
6,10	8	2	2	0,05	5	0,05	5
10,14	12	4	6	0,1	10	0,15	15
14,18	16	10	16	0,25	25	0,40	40
18,22	20	4	20	0,1	10	0,50	50
22,26	24	12	32	0,3	30	0,80	80
26,30	28	8	40	0,2	20	1	100
	Σύνολο	40		1	100		

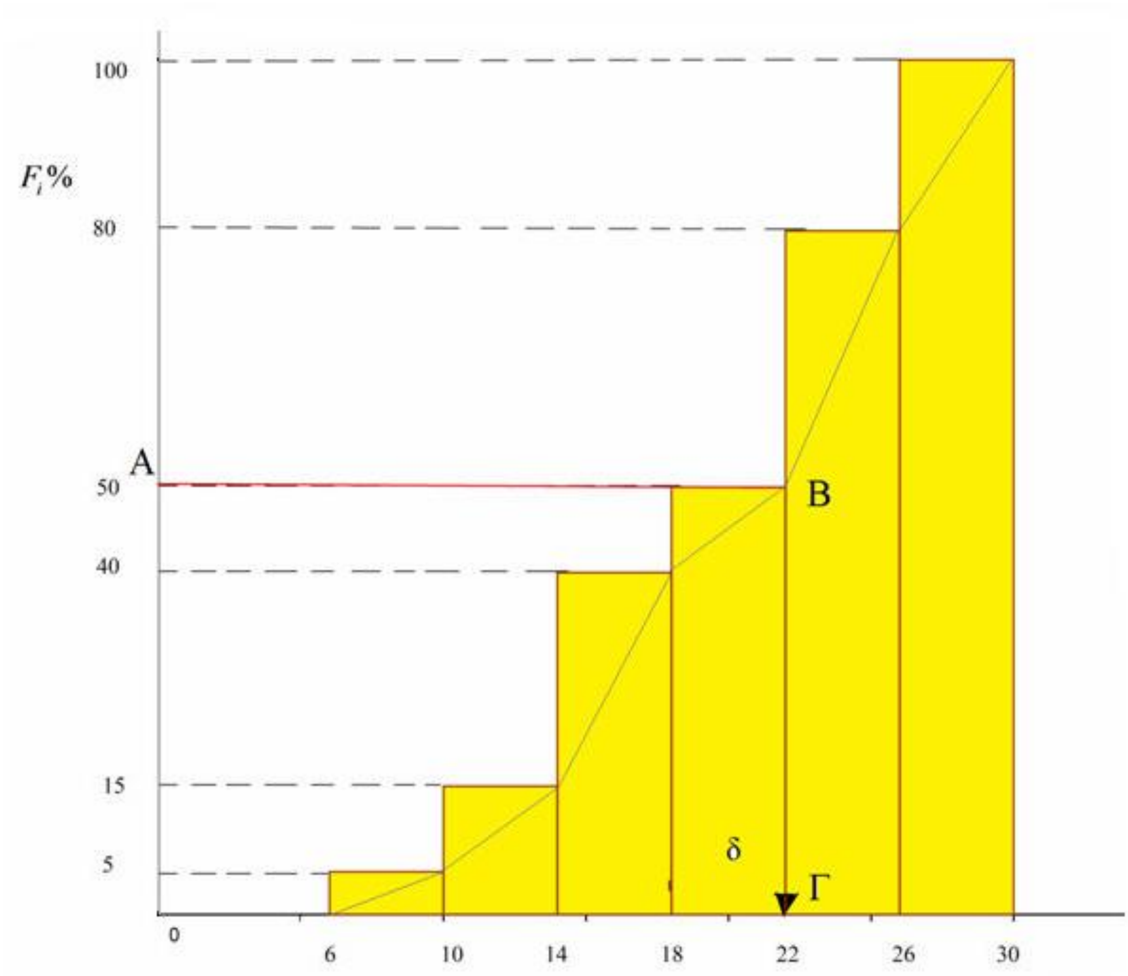
β) Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων είναι το παρακάτω σχήμα.



Για το πολύγωνο συχνοτήτων παίρνουμε δύο υποθετικές κλάσεις μία στην αρχή και μία στο τέλος με συχνότητα μηδέν. Ενώνουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων του ιστογράμματος συχνοτήτων.

γ) 1ος Τρόπος Από τον συμπληρωμένο πίνακα παρατηρούμε ότι το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή κάτω από 22. Οπότε η διάμεσος είναι δ=22.

2ος Τρόπος Η διάμεσος θα έχει αθροιστική συχνότητα $F_i = 50\%$.Κατασκευάζουμε το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και από το σημείο Α (50% των παρατηρήσεων) φέρουμε ΑΒ//Οx και στη συνέχεια τη ΒΓ $\perp$ Οx. Τότε, στο σημείο Γ αντιστοιχεί η διάμεσος δ των παρατηρήσεων. Δηλαδή δ=22.



δ) Γνωρίζουμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων της 4ης κλάσης $18,22$ είναι $\nu_4 = 4$, θεωρούμε ότι το πλήθος των ημερών αδείας αυτής της κλάσης που είναι τουλάχιστον 20 είναι $\frac{\nu_4}{2} = 2$.

Άρα, το πλήθος των εργαζομένων που δικαιούνται τουλάχιστον 20 ημέρες αδείας είναι ίσο με: $\frac{\nu_4}{2} + \nu_5 + \nu_6 = 2 + 12 + 8 = 22$ εργαζόμενοι.

ε) Το ποσοστό των εργαζομένων που δικαιούνται από 10 έως και 24 ημέρες αδείας ανήκουν στις κλάσεις $10,14$, $14,18$, $18,22$ και στο μισό της $22,26$, οπότε είναι

$$f_2 + f_3 + f_4 + \frac{1}{2}f_5 = 0,1 + 0,25 + 0,1 + \frac{0,3}{2} = 0,45 + \frac{0,3}{2} = \frac{1,2}{2} = 0,6.$$

Άρα το 60% των εργαζομένων δικαιούνται από 10 έως και 24 ημέρες αδείας.

ΘΕΜΑ Γ

Α.

α) Αφού στην Α΄ ομάδα αυξάνονται οι βαθμοί κατά 3 μονάδες, θα έχομε: $\overline{x_A} = \bar{x} + 3 = 15$, $s_A = s = 1,2$

Αφού στη Β΄ ομάδα αυξάνονται οι βαθμοί κατά 30% , θα έχομε: $\overline{x_B} = \bar{x} \cdot 1,3 = 15,6$, $s_B = s \cdot |1,3| \Leftrightarrow s_B = 1,2 \cdot |1,3| = 1,56$

β) Έστω $t_i,\ i = 1, 2, ..., \nu$ οι βαθμολογίες των μαθητών της Α΄ ομάδας για τις οποίες ισχύει $\bar{x} = 12$ και $s = 1,2$. Τα τετράγωνα των βαθμολογιών δίνονται από τον τύπο $y_i = t_i^2, i = 1, 2, \cdots, \nu$.

Η μέση τιμή αυτών των βαθμολογιών είναι $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu}$

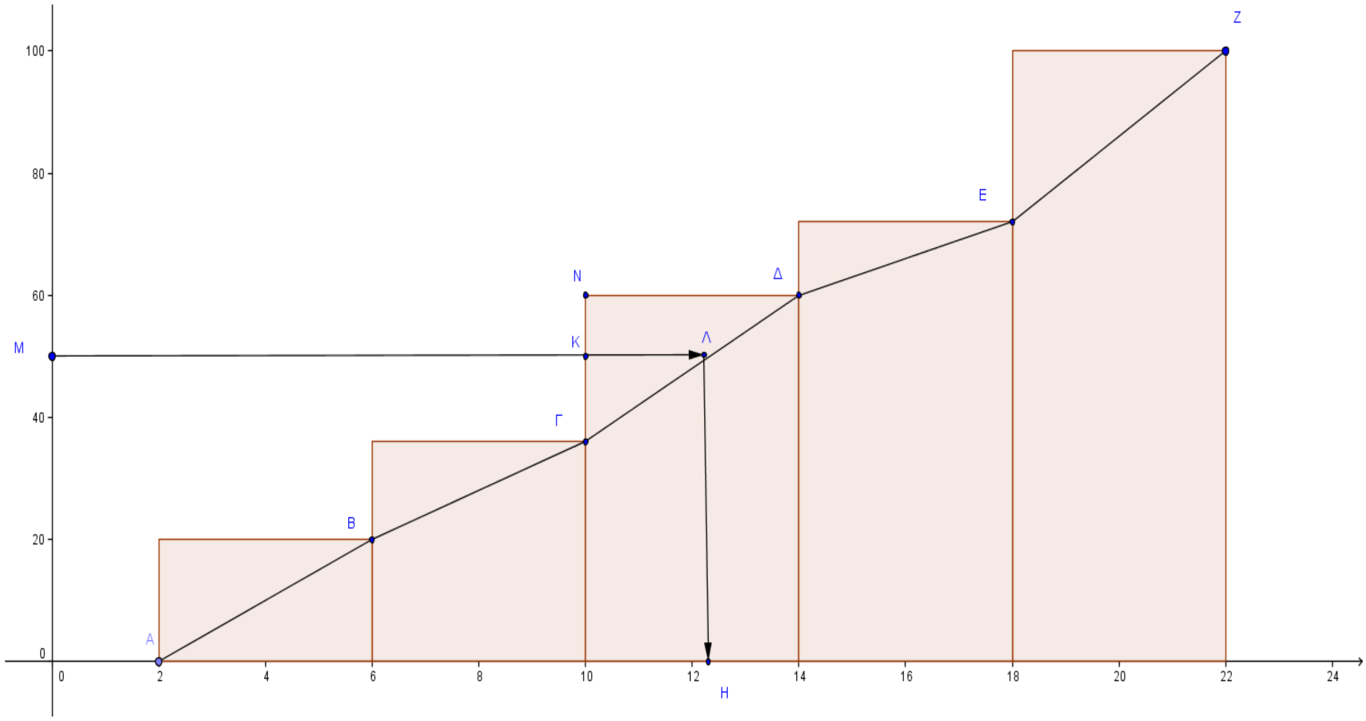
Από τον τύπο που δίνεται έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu^2} \Leftrightarrow s^2 = \bar{y} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \bar{y} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow \bar{y} = s^2 + \bar{x}^2 \Leftrightarrow \bar{y} = s^2 + \bar{x}^2 = 1,2^2 + 12^2 = 145,44$$

Β.

α) έχουμε το παρακάτω σχήμα



και τον πίνακα

…,…	x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
2, 6	4	10	10	0,20	20	0,20	20
6, 10	8	8	18	0,16	16	0,36	36
10, 14	12	12	30	0,24	24	0,60	60
14, 18	16	6	36	0,12	12	0,72	72
18, 22	20	14	50	0,28	28	1	100
	Σύνολο	50		1	100		

β)

- Τα τρίγωνα $\Gamma K\Lambda$ και $\Gamma N\Delta$ είναι όμοια άρα έχουμε

$$\frac{\Gamma K}{\Gamma N}=\frac{K\Lambda}{N\Delta}\Leftrightarrow\frac{50-36}{60-36}=\frac{x}{14-10}\Leftrightarrow\frac{14}{24}=\frac{x}{4}\Leftrightarrow x\simeq 2,3 \text{ άρα } \delta\simeq 12,3$$

- Το εύρος $R=22-2=20$

- Η μέση τιμή

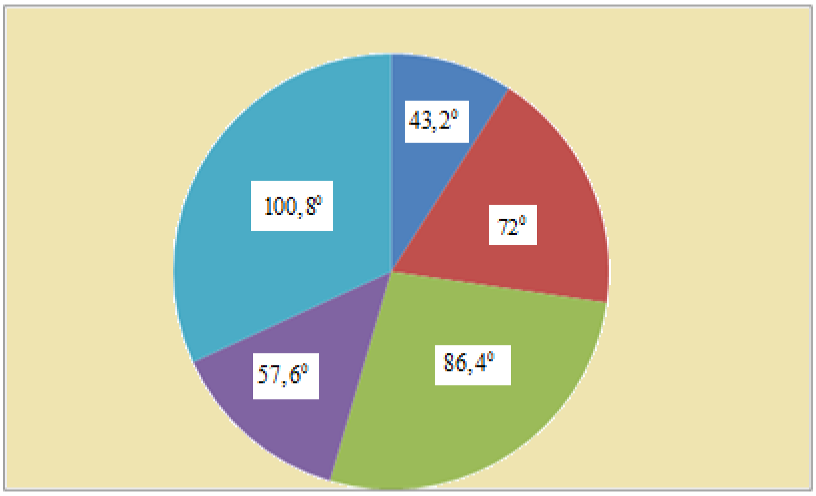
$$\bar{x}=\frac{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4+x_5v_5}{50}=\frac{4\cdot 10+8\cdot 8+12\cdot 12+16\cdot 6+20\cdot 14}{50}=12,48$$

γ) Από τον τύπο $\alpha_i=360^o\cdot\frac{v_i}{v}$ έχουμε

$\alpha_1=360^o\cdot\frac{v_1}{v}=360^o\cdot\frac{10}{50}=72^0$, $\alpha_2=360^o\cdot\frac{v_2}{v}=360^o\cdot\frac{8}{50}=57,6^0$,

$\alpha_3=360^o\cdot\frac{v_3}{v}=360^o\cdot\frac{12}{50}=86,4^0$, $\alpha_4=360^o\cdot\frac{v_4}{v}=360^o\cdot\frac{6}{50}=43,2^0$,

$\alpha_5=360^o\cdot\frac{v_5}{v}=360^o\cdot\frac{14}{50}=100,8^0$

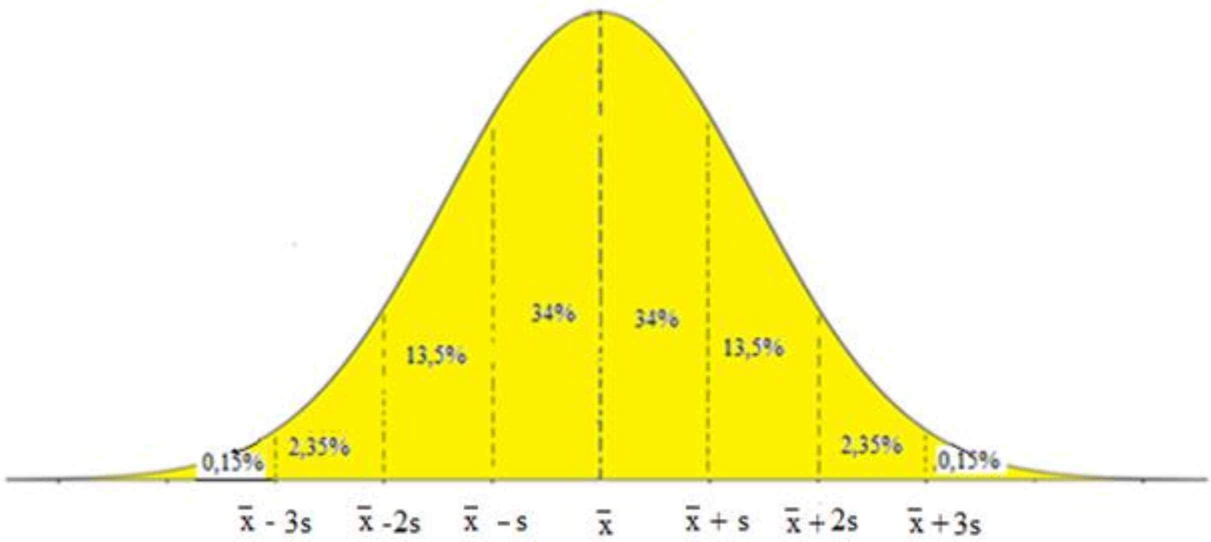


ΘΕΜΑ Δ

α)

- Οι παρατηρήσεις της μεταβλητής X ακολουθούν κανονική κατανομή.

- Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε κανονική κατανομή τότε η τυπική απόκλιση έχει τις παρακάτω ιδιότητες όπως φαίνονται στο σχήμα

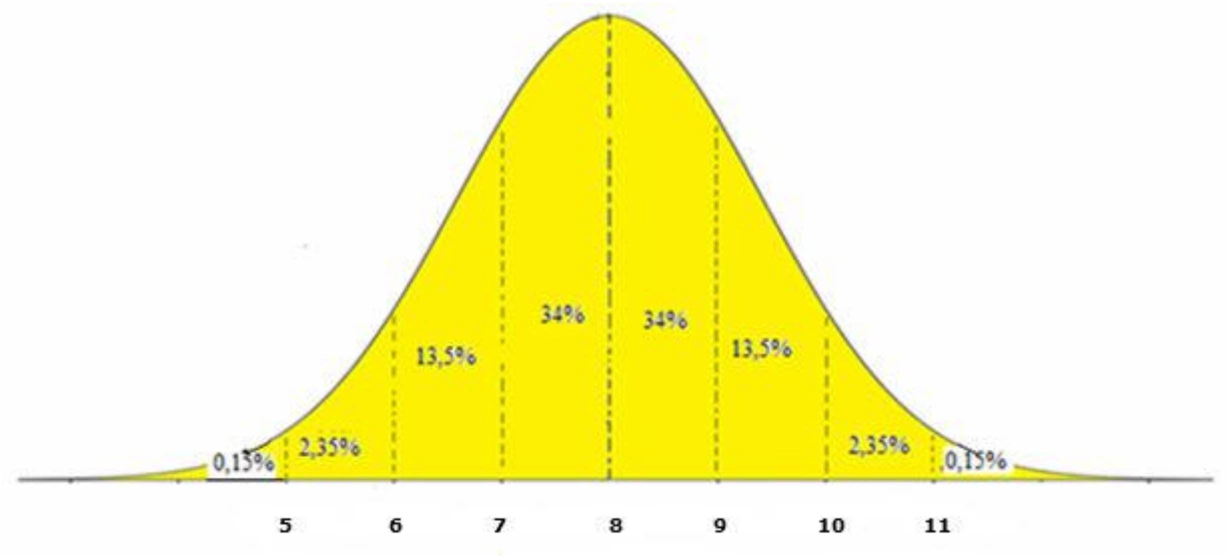


- Το $2,5\% = \dfrac{100\% - 95\%}{2}$ είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή μικρότερη από το $\bar{x} - 2s$, άρα $\bar{x} - 2s = 6$.

- Το 15,85% των παρατηρήσεων ανήκει στα διαστήματα $\bar{x} - 3s, \bar{x} - s$ και $\bar{x} + s, \bar{x} + 3s$.

- Επειδή όμως το 6<9, τότε το διάστημα (9,11) θα είναι το $\bar{x} + s, \bar{x} + 3s$, οπότε θα έχουμε: $\begin{cases} \bar{x} + s = 9 \\ \bar{x} + 3s = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 9 - s \\ 9 - s + 3s = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 9 - s \\ 2s = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 8 \\ s = 1 \end{cases}$.

β) Από το α) ερώτημα βρήκαμε ότι $\bar{x} = 8, s = 1$ άρα θα έχουμε:



Σχήμα 1

Στο διάστημα (7,9) έχουμε το 68% των παρατηρήσεων (Σχήμα 1), άρα αν ν το μέγεθος του δείγματος τότε θα έχουμε $\frac{68}{100}\cdot\nu = 136 \Leftrightarrow 68\cdot\nu = 13600 \Leftrightarrow \nu = \frac{13600}{68} \Leftrightarrow \nu = 200$

γ)

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $7,10$ είναι $68\% + 13,5\% = 81,5\%$ (βλέπε σχήμα 1)
- $\frac{81,5}{100}\cdot\nu = \frac{81,5}{100}\cdot 200 = 163$

δ)

- Θεωρούμε τις τιμές z_i, $i = 1,2,\cdots,\nu$ με $z_i = c_1\cdot x_i$, $i = 1,2,\cdots,\nu$, οπότε από την εφαρμογή 3 σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου θα έχουμε μέση τιμή $\bar{z} = c_1\cdot\bar{x} = 8c_1, \ 1$ και τυπική απόκλιση $s_z = |c_1|\cdot s_x = c_1\cdot 1 = c_1, \ 2$.
- Οι τιμές των παρατηρήσεων y_i, $i = 1,2,\cdots,\nu$ προκύπτουν από τη σχέση $y_i = z_i - c_2$ με μέση τιμή $\bar{y} = 10$ και τυπική απόκλιση $s_y = 2$, οπότε από την εφαρμογή 3 σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου θα έχουμε $\bar{y} = \bar{z} - c_2 \overset{1}{\Rightarrow} 10 = 8c_1 - c_2, \ 3$ και $s_y = s_z \overset{2}{\Rightarrow} 2 = c_1, \ 4$

Η $3 \overset{4}{\Rightarrow} 10 = 8\cdot 2 - c_2 \Leftrightarrow c_2 = 16 - 10 \Leftrightarrow c_2 = 6$