ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2^{ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 1, 2)

ΘΕΜΑ Α

1. Έχουμε

$$F(x+h)-F(x) = \left(f(x+h)+g(x+h)\right) - \left(f(x)+g(x)\right) = \left(f(x+h)-f(x)\right) + \left(g(x+h)-g(x)\right)$$

και για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$

άρα $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$

2.

α) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος ν.

β) **Διακριτές** λέγονται οι ποσοτικές μεταβλητές που παίρνουν μόνο μεμονωμένες τιμές
Συνεχείς λέγονται οι ποσοτικές μεταβλητές που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή από ένα διάστημα πραγματικών αριθμών (α,β).

3. α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ με $x_0\in(\alpha,\beta)$ και αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά η πρώτη παράγωγος f' τότε η f παρουσιάζει ακρότατο για $x=x_0$, δηλαδή εκεί που μηδενίζεται η f' έχουμε πιθανό ακρότατο.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x)=2\alpha x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θα έχουμε κατ' αρχάς $f'(-2)=0\Leftrightarrow 2\alpha(-2)+\beta=0\Leftrightarrow -4\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\beta=4\alpha$, **(1)**

Επειδή η συνάρτηση έχει στο σημείο με τετμημένη $x_0=-2$ τοπικό ακρότατο ίσο με 1 η γραφική της παράσταση θε διέρχεται από το σημείο $A(-2,1)$ οπότε θα έχουμε

$f(-2)=1\Leftrightarrow \alpha(-2)^2+\beta(-2)+5=1\Leftrightarrow 4\alpha-2\beta=-4\Leftrightarrow 2\alpha-\beta=-2$, **(2)**

Η $(2)\overset{(1)}{\Rightarrow}2\alpha-4\alpha=-2\Leftrightarrow -2\alpha=-2\Leftrightarrow\alpha=1\overset{(1)}{\Rightarrow}\beta=4$

Άρα έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2+4x+5$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν η πρώτη παράγωγος f' αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά του $x_0=-2$.

Έχουμε ότι $f'(x)=2x+4$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow 2x=-4\Leftrightarrow x=-2$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)=2x+4$		-	0	+	
f		↘	Ολικό Ελάχιστο $f(-2)=1$	↗	

Άρα η f' αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά του $x_0=-2$, άρα οι τιμές $\alpha=1,\beta=4$ είναι δεκτές.

β) Για $\alpha=1$ και $\beta=4$ έχουμε $f(x)=x^2+4x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=2x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής (ε): $y=\lambda x+\kappa$ με $\lambda=f'(2)=8$, οπότε η ευθεία γίνεται (ε): $y=8x+\kappa$.

Αφού όμως το σημείο $A\left(2,f(2)\right)=(2,17)$ ανήκει στην ευθεία (ε) θα ισχύει:
$17=8\cdot 2+\kappa \Leftrightarrow \kappa=1$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι (ε): $y=8x+1$.

ΘΕΜΑ Γ

α) Για $x\neq 3$ έχουμε $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-21x+45}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x^2+2x-15)}{x-3}=x^2+2x-15$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2x-15)=3^2+2\cdot 3-15=0$.

Επίσης $f(3)=16\cdot s-2\cdot \bar{x}$.

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=3$, θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)$, δηλαδή $16\cdot s-2\cdot \bar{x}=0$ **(1)**. Οπότε έχουμε:

$$0=16\cdot s-2\cdot \bar{x}\Leftrightarrow 16\cdot s=2\cdot \bar{x}\Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{16}\Leftrightarrow CV=0{,}125=12{,}5\%.$$

Επειδή $CV=12{,}5\%>10\%$ συμπεραίνουμε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

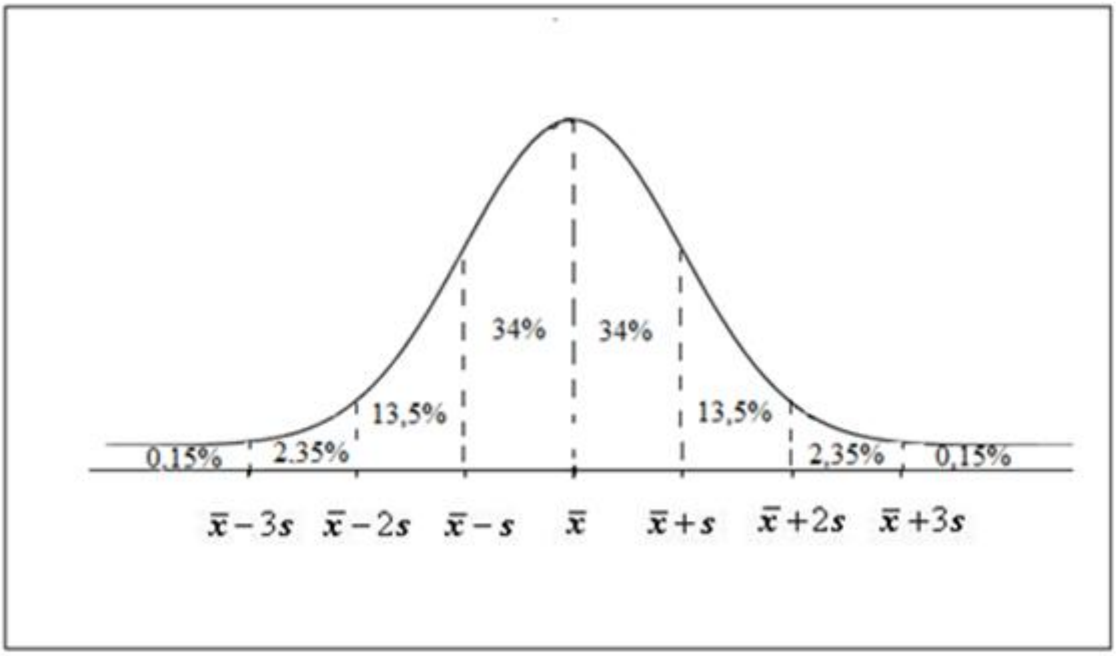
β) Επειδή το σημείο $M(4,3s)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα ισχύει:

$f(4)=3s\Leftrightarrow 4^2+2\cdot 4-15=3s\Leftrightarrow 9=3s\Leftrightarrow s=3$.**(2)**

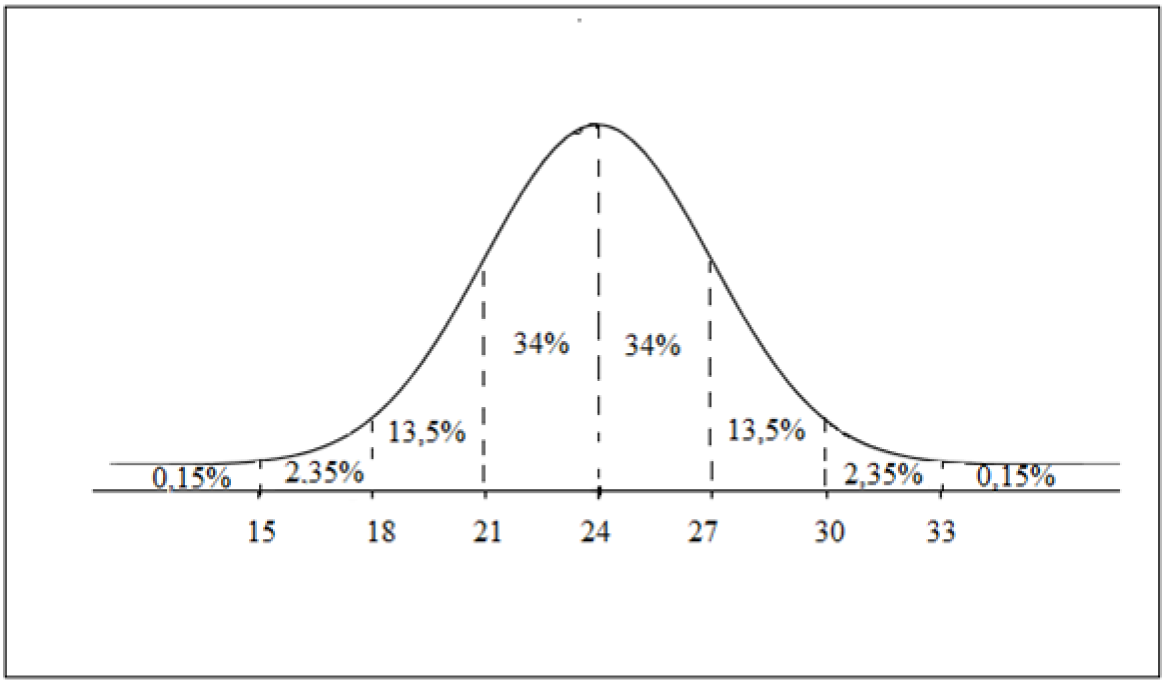
Από το α) ερώτημα έχουμε τη σχέση **(1)** $16\cdot s-2\cdot \bar{x}=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}16\cdot 3-2\cdot \bar{x}=0\Leftrightarrow \bar{x}=24$.

γ) i.

- Οι παρατηρήσεις της μεταβλητής X ακολουθούν κανονική κατανομή.
- Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε κανονική κατανομή τότε η τυπική απόκλιση έχει τις παρακάτω ιδιότητες όπως φαίνονται στο σχήμα.



Από β) ερώτημα βρήκαμε ότι $\bar{x}=24, s=3$ άρα θα έχουμε



Σχήμα 1

- Το $2,5\% = \dfrac{100\% - 95\%}{2}$ είναι το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή μικρότερη από το $\bar{x} - 2s = 18$, άρα θα ισχύει $\dfrac{2,5}{100} \cdot \nu = 5 \Leftrightarrow 2,5 \cdot \nu = 500 \Leftrightarrow \nu = 200$.

ii.

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $21,30$ είναι $68\% + 13,5\% = 81,5\%$ (βλέπε σχήμα 1)

- Άρα το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $21,30$ είναι $\dfrac{81,5}{100} \cdot 200 = 163$.

δ) Θεωρούμε τις τιμές y_i, $i = 1, 2, \cdots, v$ με $y_i = t_i + c$, $i = 1, 2, \cdots, v$, οπότε από την εφαρμογή 3 σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου θα έχουμε, μέση τιμή $\bar{y} = \bar{x} + c$ και $s_y = s$.

Το δείγμα των παρατηρήσεων που προκύπτουν για να είναι ομοιογενές θα πρέπει να ισχύει

$$CV' \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{24 + c} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow 24 + c \ge 30 \Leftrightarrow c \ge 6 \ .$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του c είναι το 6.

ΘΕΜΑ Δ

α) Είναι $f'(x) = 3x^2 + \ 2\lambda - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $\lambda > 0$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο $A(1, f(1))$ θα έχει εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha = f'(1) = 3 + 2\lambda - 3 = 2\lambda$.

Οπότε η εξίσωση της ευθείας γίνεται $y = 2\lambda x + \beta$.

Επειδή το σημείο $A(1, f(1)) = (1, 3\lambda)$ ανήκει στην εφαπτομένη θα ισχύει:

$3\lambda = 2\lambda + \beta \Leftrightarrow \beta = \lambda$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση θα είναι η $y = 2\lambda x + \lambda$, με $\lambda > 0$.

Β) i. Από την εξίσωση της εφαπτομένης προκύπτει η σχέση $y_i = 2\lambda x_i + \lambda$, με $\lambda > 0$ και $i = 1, 2, ..., \nu$.

Για τη μεταβλητή $z_i = 2\lambda \cdot x_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ θα έχουμε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου ότι η μέση τιμή $\bar{z}$ και η τυπική απόκλιση s_z θα είναι:

$\bar{z} = 2\lambda \cdot \bar{x}$ και $s_z = |2\lambda| \cdot s_x = 2\lambda s_x$.

Ομοίως για τη μεταβλητή $y_i = z_i + \lambda$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, θα έχουμε ότι η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y θα είναι:

$\bar{y} = \bar{z} + \lambda$ και $s_y = s_z$.

οπότε θα έχουμε $\bar{y} = 2\lambda \bar{x} + \lambda$ και $s_y = 2\lambda s_x \Leftrightarrow \dfrac{s_x}{s_y} = \dfrac{1}{2\lambda}$.

ii. Αφού $\bar{y} = 2\lambda \bar{x} + \lambda$ και $\bar{x} = 2$, τότε $\bar{y} = 5\lambda$.

Έχουμε $\dfrac{CV_x}{CV_y} = \dfrac{\frac{s_x}{\bar{x}}}{\frac{s_y}{\bar{y}}} = \dfrac{s_x \cdot \bar{y}}{s_y \cdot \bar{x}} = \dfrac{s_x}{s_y} \cdot \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}} \overset{(i)}{=} \dfrac{1}{2\lambda} \cdot \dfrac{5\lambda}{2} = \dfrac{5}{4} > 1$. Οπότε $CV_y < CV_x$

Άρα μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει το δείγμα των τεταγμένων.

iii. Είναι $s_x = 5 \cdot s_y \Leftrightarrow \dfrac{s_x}{s_y} = 5 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{2\lambda} = 5 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{10}$.

Για $\lambda = \dfrac{1}{10}$ έχουμε $\bar{y} = 5\lambda = 5 \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \bar{y} = 0,5$.