

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
3^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 1, 2)

ΘΕΜΑ Α

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $F(x)$, $f(x)$ και $g(x)$ με $F(x) = f(x) + g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες 10

2. α) Με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Μονάδες 2

β) Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 3

3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)**, αν είναι σωστή, ή με **Λάθος (Λ)**, αν είναι λανθασμένη.

α) Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι $f'(x) = x - 2 \ln x$, $x > 0$ τότε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει οριζόντιες εφαπτόμενες στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Μονάδες 2

β) Αν $f(x) = e^x + \ln 2$, τότε η παράγωγός της είναι $f'(x) = e^x + \frac{1}{2}$

Μονάδες 2

γ) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

Μονάδες 2

δ) Όταν οι τιμές της μεταβλητής X πολλαπλασιαστούν επί μία σταθερά $c \neq 0$, τότε ο συντελεστής μεταβολής CV του δείγματος παραμένει σταθερός.

Μονάδες 2

ε) Αν για δύο δείγματα A και B ισχύει $CV_A < CV_B$ τότε το A έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το B.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 5$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η συνάρτηση f να έχει στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -2$ ακρότατο ίσο με 1.

Μονάδες 15

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 16 \cdot s - 2 \cdot \bar{x}, & x = 3 \end{cases}$ όπου $\bar{x} \neq 0$ είναι η μέση

τιμή και s η τυπική απόκλιση, των παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n ενός δείγματος μεγέθους n . Θεωρούμε ότι το σημείο $M(4, 3s)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

α) Αποδείξτε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

β) Αποδείξτε ότι $\bar{x} = 24$ και $s = 3$.

Μονάδες 5

γ) Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε κανονική ή περίπου κανονική κατανομή και 5 παρατηρήσεις έχουν τιμή μικρότερη του 18 να βρείτε:

i. Το μέγεθος του δείγματος n .

Μονάδες 5

ii. Το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $[21, 30]$.

Μονάδες 5

δ) Προσθέτουμε σε κάθε μια από τις παρατηρήσεις t_1, t_2, \dots, t_n την ίδια θετική ακέραια ποσότητα c . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του c ώστε το δείγμα των παρατηρήσεων που προκύπτει να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (2\lambda - 3)x + \lambda + 2$, όπου $\lambda > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι η $y = 2\lambda x + \lambda$ με $\lambda > 0$.

Μονάδες 7

β) Αν x_1, x_2, \dots, x_n οι τετμημένες των σημείων της παραπάνω εφαπτομένης με μέση τιμή $\bar{x} = 2$ και y_1, y_2, \dots, y_n οι αντίστοιχες τεταγμένες τότε:

i. Να βρείτε το λόγο $\frac{s_x}{s_y}$ όπου s_x, s_y οι τυπικές αποκλίσεις των τετμημένων και τεταγμένων αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ii. Αν CV_x, CV_y οι συντελεστές μεταβολής των τετμημένων και τεταγμένων αντίστοιχα, να συγκρίνετε την ομοιογένεια των δύο αυτών δειγμάτων.

Μονάδες 8

iii. Αν $s_x = 5 \cdot s_y$, να βρείτε τη μέση τιμή \bar{y} των τεταγμένων.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ